

Matematik Extra

Måløvvej Skole

6. Klasse

2/5-14/6 2022



Jørgen Halfdan Andersen

jhanden@hotmail.com

jhanden.dk

V1.2022.06.14

OBS: Brug Slide Show til visning

About

Denne lille matematikpræsentation er lavet til brug i 6.klasse (6A) Måløvhøj Skole foråret 2022. Første session 2/5, sidste 14/6, 1 gang pr uge.

Målsætningen var, at "udfordre" de lidt bedre matematik-elever, så de ikke skulle kede sig (alt for meget). Det tror jeg ikke, de har gjort 😊

Jeg ved af erfaring, at de "bedre" (må ikke misforstås) elever kan nå meget langt på kort tid. Derfor føler jeg også, at de har fortjent ekstra service og er meget glad for, at jeg fik muligheden. Jeg håber den fortsætter.

Materialet har jeg dels selv skrevet til lejligheden og dels klippet og lånt fra de kilder, som nævnes nedenfor. Jeg har stræbt efter at citere kilderne hele vejen. (Beklager at skriftstørrelsen hopper op og ned i denne udgave).

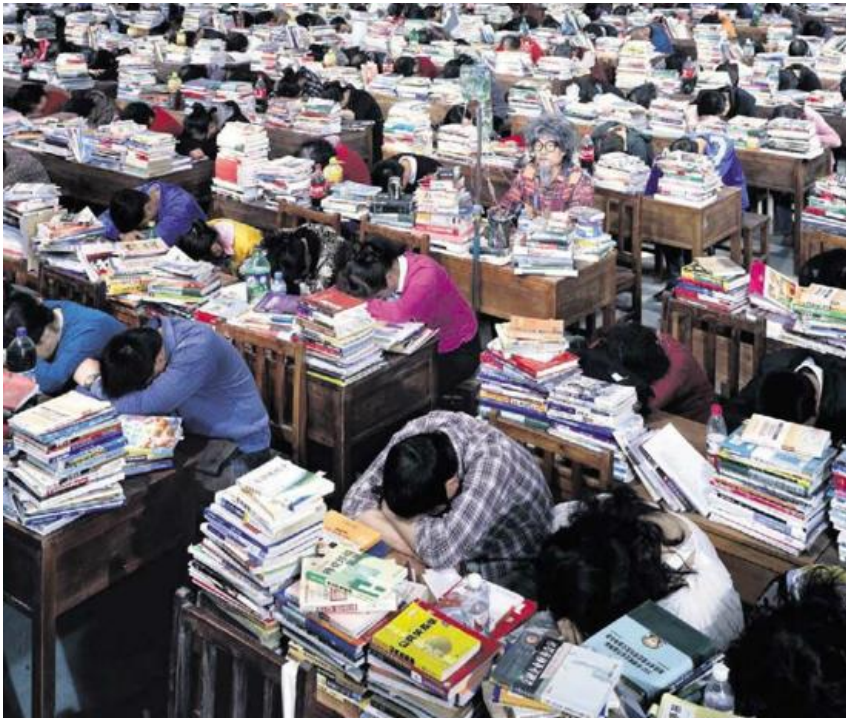
Man kan låne alt herfra på samme vilkår. Angiv gerne kilden. Finder man fejl, må man gerne skrive til mig på jhanden@hotmail.com.

PS: Min hjemmeside er helt ny (til lejligheden) og derfor ganske trist. Den skal nok blive bedre.

Jørgen Halfdan Andersen

Måløv 7/6 2022

Indhold



Hvad skal vi her?

Gymnasiet!

Emneoversigt

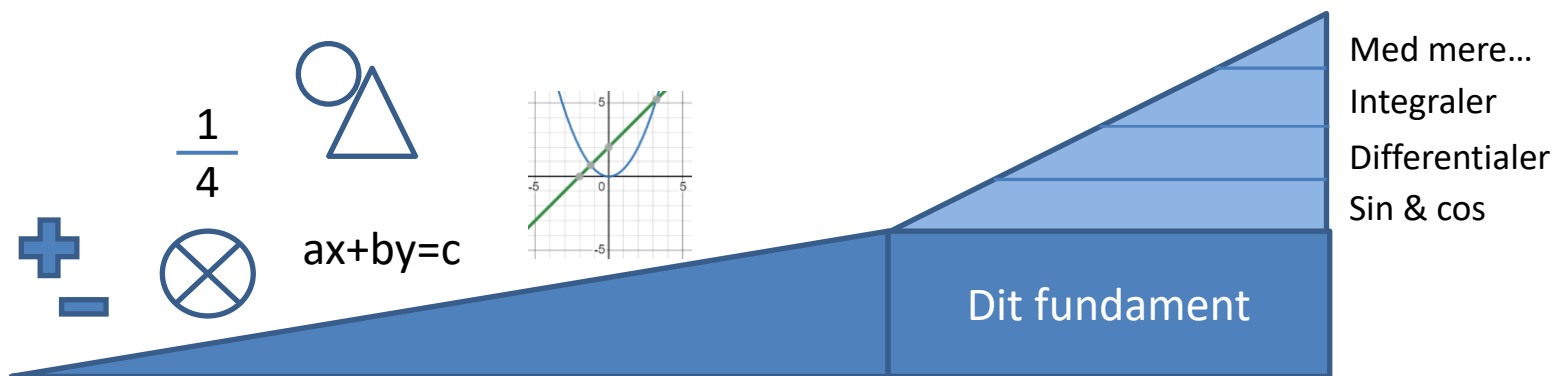
Hvad gør vi

Hvem er Morfar?



Gymnasiet (1)

På gymnasiet skal du lære rigtig meget på kort tid i forhold til i folkeskolen. Mange ting bliver kun gennemgået én gang, og nyt stof bygger oven på det, man allerede har lært. Netop derfor gælder det også om at komme godt fra start.



Gymnasiet (2)

Du skal ikke bare lære at udregne det rigtige svar

Folkeskolen har fokus på at lære dig basale regnefærdigheder, så du kan komme frem til det rigtige resultat ved hjælp af bestemte formler. På gymnasiet skal du lære at argumentere for, hvorfor de formler, du lærer, gælder. Det gør du gennem matematisk *bevisførelse*. Det er altså ikke nok at kunne regne – man skal også forstå.

Det vil vi også øve os i!

Emneoversigt - fundamentet

- Brøker
- Geometri, arealer og rumfang
- Algebra – led og faktorer
- Regnearternes hierarki - Parenteser
- Reduktion
- Potenser
- Kvadratrod og andre rødder
- Ligninger
- Ligninger med flere ubekendte
- Koordinatsystemet og funktioner
- Lineære ligninger – den rette linje
- Grafiske løsninger
- Polynomier
- Parablen specielt
- Anden grads ligninger
- Det frie fald - kaste-parablen
- Cirkler og ellipser



Emneoversigt - fremtiden

- Polynomier af højere orden
- Trigonometri – sinus og cosinus
- Eksponentialfunktioner - e
- Logaritmer - \ln
- Vektorer
- Differentialregning
- Integralregning
- Anvendelse på fysiske systemer
- Numeriske metoder
- Statistik



Gode web sites

- [Webmatematik.dk - Gratis online lektiehjælp i matematik – Webmatematik](#) – alle klassetrin
- [Wikipedia.org](#) eller [.dk](#)
- [Desmos | Graphing Calculator](#)
- [Geogebra.org](#) – samme sag
- [YouTube](#)
- [Nordisk Matematikkonkurrence - Danmarks Matematiklærerforening \(dkmat.dk\)](#)
- [Kænguruen \(kaenguruen.dk\)](#) – konkurrenceopgaver
- [Matematikbogen.dk](#) - opgaver op til 10. klasse

Materiale er lånt/klippet fra alle disse kilder

Dagens emner 14/6 2022

- **Hjemmeopgaven**
 - Afstandsformlen skitseres
- Repetition
 - Den rette linje, afrunding (kan man det?)
- **Ny Hjemmeopgave**
 - Ingen hjemmeopgave til sommerferien 😊
- Nyt stof
 - Parablen
 - Specielt kasteparablen

Hjemmeopgaver

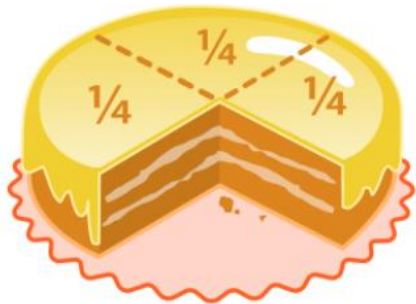
Følgende beviser er gennemførte og dermed tilføjet vores egen formelsamling:

- Pythagoras sætning (Johanne)
- Cirkelns areal (Alexander)
- Uendelig sum af $1/2 + 1/4 + 1/8 \dots = 1$
- Formel for antal diagonaler i en regulær polygon (Alexander)

Brøker

- [Forlænge og forkorte brøker \(Matematik C, Tal og Regnearter\) – Webmatematik](#)
- [Addition og subtraktion af brøker \(Matematik C, Tal og Regnearter\) – Webmatematik](#)
- [Multiplikation og division med brøker \(Matematik C, Tal og Regnearter\) – Webmatematik](#)
- [Delen af det hele \(7.-9. klasse, Brøker\) – Webmatematik](#)
- [Brøker \(7.-9. klasse\) – Webmatematik](#)

Brøker



Hvad er en brøk?

Regneregler for brøker

- Forlænge/forkorte
- Addere og subtrahere
- Gange (multiplicere)
- Dividere

Dele af det hele

Omregning brøker, decimaltal, procenter

Brøker

- En brøk er “en division, vi ikke har gennemført”
- Eksempel: “2 divideret med 8” skrives, som brøk

$$\frac{2}{8}$$

Tæller
Brøkstreg
Nævner

$$\frac{2}{8}$$



Man udtaler det “to ottendedele”

Deling af pizzaer eller lagkager er typiske eksempler

Nogle kalder det ligefrem Pizzaregning

Brøker

OBS Alternative måder at skrive division, kan også bruges ved brøker (typisk for at spare plads)

Man kan bruge ":" og "/"

$$\frac{1}{4} \quad 1:4 \quad 1/4$$

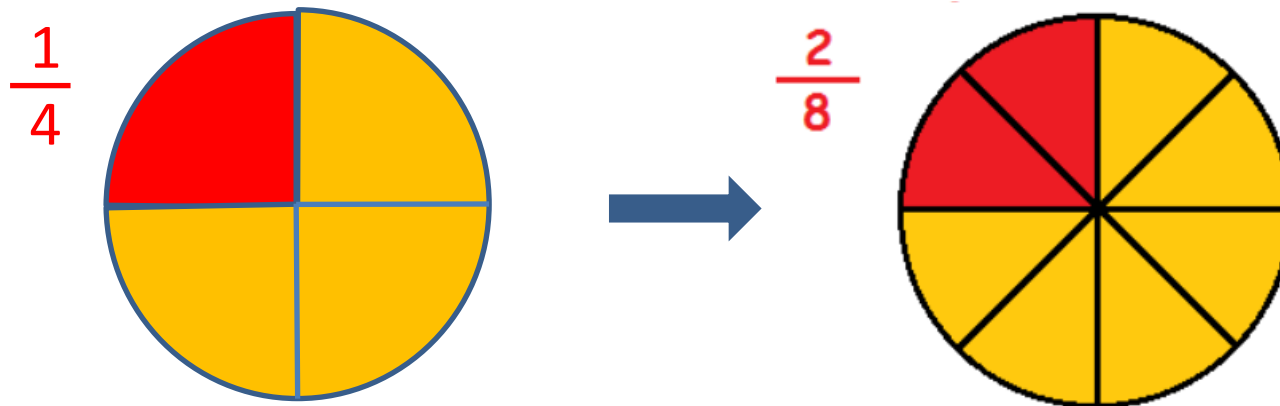
betyder alle det samme: 1 fjerdedel, dvs 1 divideret med 4

Man kan bruge parenteser og skrive $(x + 1)/(3 + y^2)$

Forlænge en brøk

- Man *forlænger* en brøk ved at *gange* både tæller og nævner med samme tal **Bemærk** at tallet ikke behøver at være et heltal
- Derved ændres brøkens *værdi* ikke
- Ex forlæng $\frac{1}{4}$ med 2 (begge brøker har værdien 0,25)

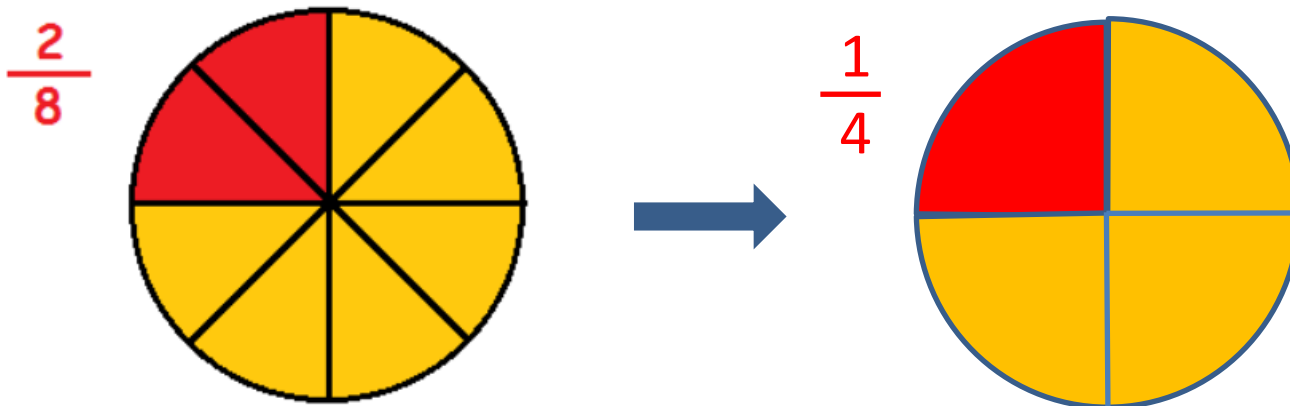
$$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{2} = \frac{2}{8}$$



Forkorte en brøk

- Man *forkorter* en brøk ved at *dividere* både tæller og nævner med samme tal, som normalt går op i begge
- Derved ændres brøkens *værdi* ikke
- Fx forkort $2/8$ med 2 (værdien forbliver 0,25)

$$\frac{2 : 2}{8 : 2} = \frac{1}{4}$$



Fællesnævner

Skal man addere, subtrahere eller sammenligne brøker, skal de have *samme nævner*. Den kaldes deres *fællesnævner*.

Man forlænger en eller begge brøker, så de får fællesnævner.

Fællesnævneren er et tal, som begge nævnere går op i.

Fx er en fællesnævner for sjattedele og fjerdedele = 12 (både 6 og 4 går op)

Hvis vi fx forlænger $\frac{5}{6}$ med 2
og $\frac{3}{4}$ med 3 får de fælles nævner,
og vi kan lægge dem sammen eller
blot sammenligne deres størrelse

$$\frac{5}{6} = \frac{2 \cdot 5}{2 \cdot 6} = \frac{10}{12}$$

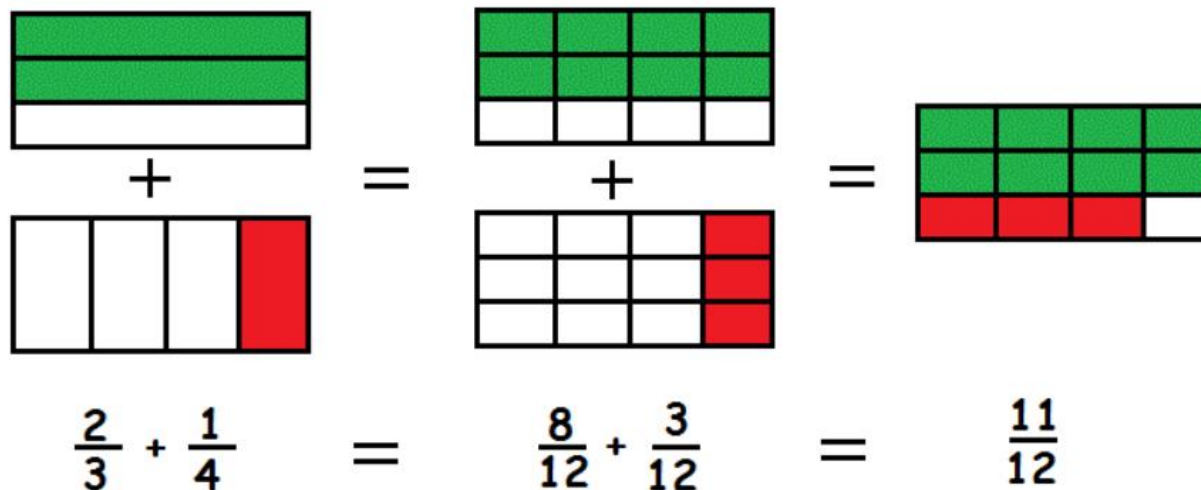
$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{9}{12}$$

Addition af brøker

- Addition og subtraktion af brøker gøres nemt, når de har fællesnævner, fx

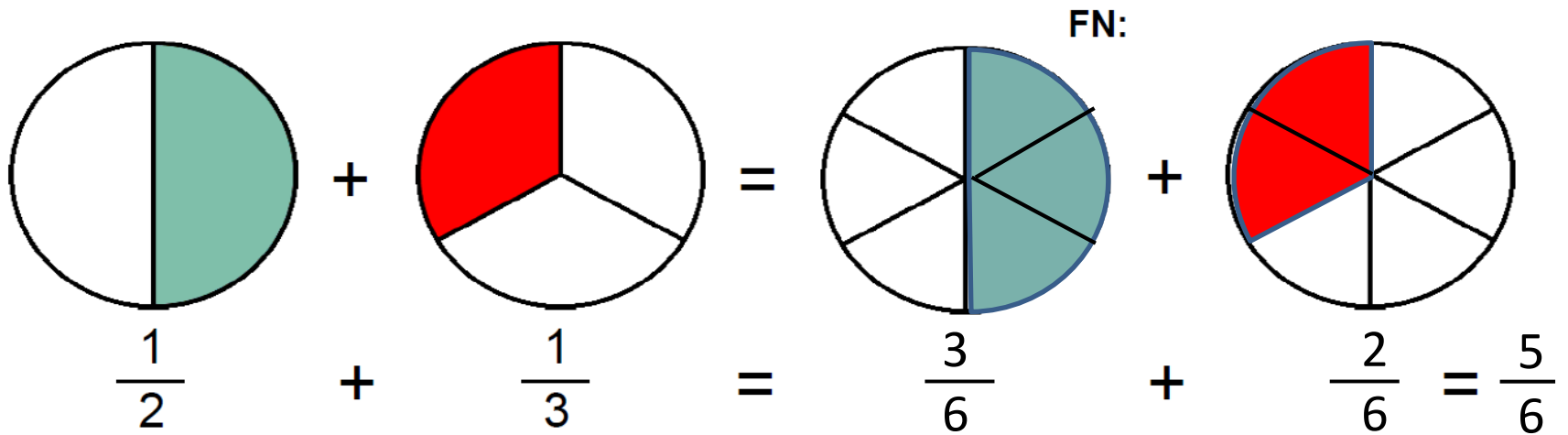
$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{8+3}{12} = \frac{11}{12}.$$

Man kan illustrere udregningen med et billede.



Addition af brøker

- Nu illustreret med pizza!



Multiplikation af brøker

Multiplikation med brøker er ganske enkelt. Man ganger simpelthen tæller med tæller og nævner med nævner. Eksempelvis

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 7} = \frac{8}{21}$$

Prøv fx efter med din lommeregner, at det stemmer!

Generelt skriver vi

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$$

Opgaver

- Udfør additionerne

$$1/2 + 1/3 =$$

$$1/2 + 1/3 + 1/4 =$$

$$1/2 + 1/3 + 1/7 =$$

$$1/2 + 1/6 + 1/21 =$$

$$1/11 + 2/5 =$$

- Subtraher

$$1/7 - 2/13 =$$

$$1/5 - 1/11 =$$

Opgaver

- Udregn

$$2/8 - 1/20 =$$

$$1 - 1/3 - 1/4 =$$

$$1/3 - 1/4 - 1/6 =$$

$$1/7 - 1/13 =$$

$$3/4 - 4/20 =$$

$$(4x + 8) * (1/2) =$$

- Resultat

$$= 1/4 - 1/20 = 1/5$$

$$= 5/12$$

$$= - 1/12$$

$$= 13/91 - 7/91 = 6/91$$

$$= 11/20$$

$$= 2x + 4$$

Opgaver

- Multipliser

$$(2/3) * (2/3) =$$

$$(2/3) * (3/2) =$$

$$(4x + 2) * (3/2) =$$

<reducer udtrykket

Division af/med brøker

Division med brøker

Når det kommer til division og brøker er der tre muligheder

1. vi deler to brøker med hinanden,
2. vi deler en brøk med et tal,
3. vi deler et tal med en brøk.

Disse tre scenarier vil vi nu kigge på!

[Regneregler for brøker \(7.-9. klasse, Brøker\) – Webmatematik](#)

Dividere brøk med brøk

Når man skal dividere en brøk med en anden brøk, så svarer det til at "vende den bagerste brøk på hovedet" og derefter gange de to brøker med hinanden.

F.eks. er

$$\frac{1}{5} : \frac{3}{4} = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{3} \begin{array}{l} \swarrow \\ \searrow \end{array} \text{byt om} = \frac{4}{15}.$$

Det er vigtigt, at det er den brøk, man dividerer med, som man vender om!

Generelt er reglen

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \begin{array}{l} \swarrow \\ \searrow \end{array} \text{byt om.}$$

Dividere brøk med brøk

Vi bruger vores gangeregler til at forstå *hvorfor*. Hvis vi fx vil dividere $\frac{2}{3}$ med $\frac{4}{5}$, så forlænger vi, så nævneren bliver 1:

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}}{\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4}}$$

Nævneren bliver 1 fordi $(\frac{4}{5}) \cdot (\frac{5}{4}) = \frac{20}{20} = 1$. Så vi får:

$$\frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}}{1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{10}{12}$$

Og vi ser reglen: divider ved at gange med den omvendte brøk

Dividere brøk med tal

Når man skal dividere et brøk med et tal, så ganger man tallet på i nævneren. F.eks er

$$\frac{5}{6} : 2 = \frac{5}{6 \cdot 2} = \frac{5}{12}.$$

En måde at huske denne regel på er ved at omskrive tallet til en brøk. (Ethvert tal svarer nemlig til en brøk med 1 i nævneren). Nu er den hen regel egentlig bare den samme som division af brøk med brøk. Eksemplet ovenfor ville blive

$$\frac{5}{6} : 2 = \frac{5}{6} : \frac{2}{1} = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5 \cdot 1}{6 \cdot 2} = \frac{5}{12}.$$

Dividere tal med brøk

Når man skal dividere et tal med en brøk, så vender man brøken om og ganger tallet på i (den nye) tæller.

F.eks. er

$$8 : \frac{19}{2} = 8 \cdot \frac{2}{19} = \frac{8 \cdot 2}{19} = \frac{16}{19}.$$

Igen kan vi omskrive tallet til en brøk med 1 i nævneren, og så er også denne regel den samme som division af brøk med brøk.

$$8 : \frac{19}{2} = \frac{8}{1} : \frac{19}{2} = \frac{8}{1} \cdot \frac{2}{19} = \frac{8 \cdot 2}{1 \cdot 19} = \frac{16}{19}.$$

Opgaver

- Division af og med brøker

$$(1/2): 3 = \qquad \qquad \qquad = 1/6$$

$$(1/2) / (3/4) = \qquad \qquad \qquad = 2/3$$

$$(1/2 + 3/4) : (3/4 + 5/6) = \qquad \qquad \qquad = 15/19$$

Udtryk med brøker

Brøker behøver ikke bare at bestå af tal

En brøk er enhver division, vi ikke udfører, fx

$$\frac{x^2 + bx - 45}{x + 2y - 23}$$

Alle reglerne, vi har opstillet, gælder også her. Vi kan forlænge, dividere, osv

Opgave

De gamle ægyptere udtrykte alle brøker som en sum af unikke brøker med tælleren 1 (summen kaldes på engelsk *Egyptian Fraction*).

$$\text{Fx er } 5/7 = 1/2 + 1/6 + 1/21$$

- Hvad er $1/14 + 1/7 + 1/2 = ?$
- Omskriv $3/8$ og $13/17$ til en sådan sum!

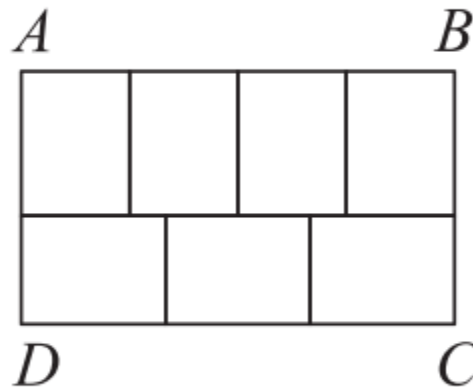
OBS: Enhver *fraction* kan skrives på uendelig mange måder

Opgave

15 Rektanglet $ABCD$ er inddelt i 7 ens små rektangler.

14%

Hvad er $\frac{|AB|}{|BC|}$?

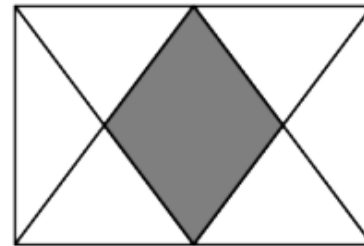


Tips: Hvad er forholdet mellem siderne i rektanglerne?

[Kaenguruen-2022-8-9-med-svar-og-procent-rigtige.pdf](#)

Opgave

-
- 6** I rektanglet er der tegnet linjestykker fra midten af de to længste sider til hjørnerne.
Hvor stor en del af rektanglet er gråt?



70%

Tips: Indtegn alle symmetrilinjer i figuren

- [Kaenguruen-2022-8-9-med-svar-og-procent-rigtige.pdf](#)

Basal Algebra

De følgende emner “forudsættes velkendte” for deltagerne på dette ekstrakursus. 😊

Ellers anbefales opfriskning fra følgende websider:

[Led og faktorer \(7.-9. klasse, Algebra\) – Webmatematik](#)

[Regnearternes hierarki \(7.-9. klasse, Algebra\) – Webmatematik](#)

[Parenteser \(7.-9. klasse, Algebra\) – Webmatematik](#)

[Negative tal \(7.-9. klasse, Algebra\) – Webmatematik](#)

[Reduktion \(7.-9. klasse, Algebra\) – Webmatematik](#)

Vi får rigeligt med øvelse undervejs.

Potenser

$$x^2$$
$$9(9^9)$$

Hvad er en potens?

Potenser med heltals eksponenter

- Gange og dividere
- Potens til ny potens
- Potens af et produkt

Brøk som eksponent: se rødder!

OBS at $9(9^9)$ er det største tal der kan skrives med 3 cifre. Det tager 1 helt liv at skrive ned!

Potenser

- [Potenser \(Matematik C, Tal og Regnearter\) – Webmatematik](#)
- Obs: reglerne skrevet med a , n og m
- [Potenser \(7.-9. klasse, Algebra\) – Webmatematik](#)
- Obs: reglerne skrevet med a , b og c

Potenser

Potenser bruges som udtryk for, at et tal ganges med sig selv måske mange gange.

Eksempel: 3 ganget med sig selv 5 gange

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

Skrives

$$3^5$$

Helt generelt skriver vi om et tal, a ganget n gange

$$a^n$$

Det lille n kaldes *exponenten*

Multiplikation af potenser

Gange med potenser

F.eks. er

$$5^2 \cdot 5^6 = \underbrace{5 \cdot 5}_{5^2} \cdot \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{5^6} = 5^8$$

Vi ser, at vi egentlig bare har lagt eksponenterne (de hævede tal) sammen.
Den regel gælder generelt.

$$3^7 \cdot 3^5 = 3^{7+5} = 3^{12}$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

[Potenser \(Matematik C, Tal og Regnearter\) – Webmatematik](#)

Potens af potens

Eksempel – Obs at parentesen er nødvendig

$$(11^3)^4 = 11^3 \cdot 11^3 \cdot 11^3 \cdot 11^3$$

Ved brug af reglen for multiplikation af potenser får vi nu

$$11^3 \cdot 11^3 \cdot 11^3 \cdot 11^3 = 11^{3+3+3+3} = 11^{12}$$

Vi kan også skrive det som

$$(11^3)^4 = 11^{3 \cdot 4} = 11^{12}$$

Den generelle regel lyder

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Division med potenser

Dividere med potenser

Hvad nu, hvis man ville dividere i stedet for at gange?

$$\frac{5^8}{5^6} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{5 \cdot 5 \cdot \color{red}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}}{\color{red}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}} = 5 \cdot 5 = 5^2$$

Altså har vi bare trukket eksponenterne fra hinanden. Reglen gælder generelt.

$$8^5 : 8^3 = 8^{5-3} = 8^2$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Potens af et produkt

Potens af et produkt

$$(2x)^3 = 2x \cdot 2x \cdot 2x = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot x = 2^3 x^3$$

Vi kan også skrive dette som

$$(2x)^3 = 2^3 \cdot x^3$$

Generelt er formlen

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Potenser m hel exponent

$$a^3 = a \cdot a \cdot a$$

$$a^2 = a \cdot a$$

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-1} = 1/a$$

$$a^{-2} = 1/(a \cdot a)$$

$$a^{-3} = 1/(a \cdot a \cdot a)$$

Rækken af potenser med positive exponenter viser os en "fornuftig" måde at udvide begrebet til også at omfatte Nul og negative exponenter. Når vi går oppefra og nedad, dividerer vi hele tiden med a . Derfor "passer hatten", når vi sætter $a^0 = 1$. Og lader negative exponenter betyde (fortsat) division med a .

Exponent 0

Hvad gør man, hvis eksponenten er 0? Man kan jo ikke gange et tal med sig selv nul gange. Men, ser du, hvis eksponenten er 0, så er potensen lig med 1! Det virker måske underligt, men det skyldes faktisk reglen for division med potenser. Den giver os

$$1 = 5^8 : 5^8 = 5^{8-8} = 5^0$$

Så 1 er det samme som 5^0 .

Vi kunne have sat hvilke som helt andre tal ind i stedet for 5 og 8 i regnestykket. F.eks.

$$1 = 2^7 : 2^7 = 2^{7-7} = 2^0$$

Negativ eksponent

Nu hvor vi ved, hvad en potens med eksponent 0 betyder, så kan vi også forstå de negative eksponenter.

Ved at regne baglæns, får vi:

$$5^{-8} = 5^{0-8} = 5^0 : 5^8 = \frac{1}{5^8}$$

Eller generelt

$$a^{-b} = 1 : a^b$$

Regneregler for potenser

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ gange}}$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

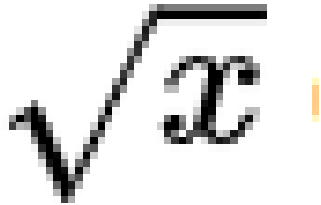
$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0$$

$$a^0 = 1, \quad a \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0$$

Rødder



Hvad er en rod?

Rødder med heltalsgrad

- Gange og dividere
- Rod af et produkt

Rødder set som potenser

Samlede regneregler

Rødder

Rødder er det omvendte af potenser. Feks. Kan vi sige

$$\sqrt{9} = 3 \quad \text{fordi} \quad 3^2 = 9$$

$$\sqrt[3]{125} = 5 \quad \text{fordi} \quad 5^3 = 125.$$

Fordi kvadratroden af 9 er 3, og 3^2 er 9, kan vi skrive:

$$(\sqrt{9})^2 = 9.$$

Eller generelt

$$(\sqrt{a})^2 = a, \quad a > 0.$$

[Kvadratrødder og andre rødder \(Matematik C, Tal og Regnearter\) – Webmatematik](#)

Rødder

Hvis vi husker på [potensregnereglerne](#) kan vi se, at

$$(9^{\frac{1}{2}})^2 = 9^{\frac{1}{2} \cdot 2} = 9^1 = 9.$$

Nu har vi, at både $9^{1/2}$ og $\sqrt{9}$, når vi opløfter det til anden potens, giver 9. Altså må de to være ens

$$\sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}}.$$

Generelt har vi, at

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}, \quad a > 0.$$

Som en sidebemærkning:

Rodtegnet er i grunden unødigt.

Man kunne nøjes med de rationale (brøker) potenser.

Det tænkte man ikke på, da man opfandt rodtegnet 😊

Da kvadratroden kan skrives om til en potens, betyder det at alle potensregnereglerne også gælder for kvadratrødder.

Rødder

Andre rødder

$$\sqrt[3]{8} = 2 \quad \text{fordi} \quad 2^3 = 8$$

$$\sqrt[4]{81} = 3 \quad \text{fordi} \quad 3^4 = 81.$$

Ligesom at man kan skrive kvadratroden om til en potens, kan man også skrive alle andre rødder om til potenser.

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}.$$

Bemærk, at da alle rødder kan skrives om til potenser, så gælder potensregnerreglerne for alle rødder.

Rødder

Hvis vi tager den n'te rod af a^n får vi selvfølgelig a

$$\sqrt[n]{a^n} = (a^n)^{\frac{1}{n}} = a^{n \cdot \frac{1}{n}} = a^1 = a.$$

Men hvad nu, hvis rod og eksponent er forskellige?

$$\sqrt[3]{4^2} = ?$$

Vi omskriver simpelthen bare roden til en potens.

$$\sqrt[3]{4^2} = (4^2)^{\frac{1}{3}} = 4^{2 \cdot \frac{1}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}.$$

Generelt har vi reglen

$$\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}.$$

Regneregler for rødder

Vi omskriver nogle af potensregnereglerne, så vi også kan bruge dem med rødder.

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$$

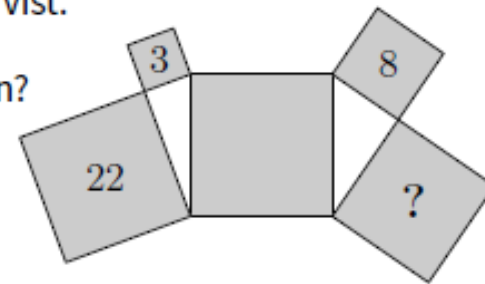
$$\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$$

Opgave

- 19** På figuren er der 5 grå kvadrater og 2 hvide retvinklede trekanter. Arealet af tre af kvadraterne er henholdsvis 3, 8 og 22 som vist.

31%

Hvad er arealet af kvadratet markeret med spørgsmålstegn?



Opgave

Udregn

$$\frac{8^{2/3} * 4^{3/2}}{4^{-1}} = ?$$

Og

(Sjette rod af 27)/(tre ophøjet til en halv) = ?

Løsning 1: 128

Løsning 2: 1

Ligninger



Hvad er en ligning

Hvad bruger vi dem til

At regne med bogstaver

At løse en ligning

Regneregler for ligninger

Teknik for løsning

At stille en ligning op

En køretur

Hvad er en ligning?

- En ligning er et matematisk udtryk, som udtrykker, at to entiteter (ting) er ens!

$$\langle \text{noget} \rangle = \langle \text{noget andet} \rangle$$

- Man kan skelne mellem 3 slags

1. Identiteter

$$\text{Fx: } 5 + 2 = 7 \quad 1 \text{ m} = 100 \text{ cm} \quad 2x-2 = 2(x-1)$$

2. Absurditeter

$$\text{Fx: } 5 = 7 \quad X = X + 1$$

3. Bestemmelsesligninger

$$\text{Fx: } x + 2 = 7 - y \quad x^2 - 6x + 8 = 0$$

Det er dem, vi skal interessere os for

Hvad bruger vi dem til?

- ALT der skal udregnes!
- Økonomi, fysik, ingeniøropgaver, simple gøremål, o.m.a
- Fx:
 - Hvor mange penge må jeg bruge på computerspil hver måned
 - Hvor høj skat skal vi ha i Ballerup kommune?
 - Hvornår har vi næste solformørkelse?
 - Hvor tyk skal min bro være, så den kan bære et tog?
 - Hvor stor en vinge skal min flyvemaskine ha?
 - Hvor lang tid tager det at komme til Århus?
 - Hvad er klokken, når middagen er færdig?

At regne med bogstaver

I ligninger bruger vi BOGSTAVER eller hele ord til at indikere ubestemte tal. Ofte græske – med underforstået mening!

$$X = 22 + \text{antal-høns}$$

$$2x + 15 = 67 - 5y \quad (2x \text{ betyder } 2 \text{ gange } x, \text{ altså } 2 \cdot x)$$

$$T = X / 100 + T_0 \quad (\text{Man benytter ofte små tal i navnene})$$

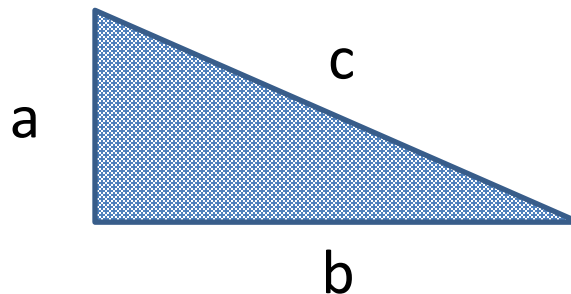
$$x_2 = x + \Delta x \quad (\" \Delta x \" \text{ betyder typisk } \" \text{lille ændring i } x \")$$

$$Y = 3(X + 17) + \varepsilon \quad (\text{Parentesen siger: både } X \text{ og } 17 \text{ ganges med } 3. \\ \varepsilon \text{ bruges ofte i betydningen } \" \text{et lille tal} \")$$

Man skal tænke på bogstaverne, som om de var tal. Man kan udføre alle de almindelige regningsarter på dem.

At regne med bogstaver (2)

- En ligning med flere bogstaver kan også nogle gange være en FORMEL. Den bruges til at beregne en størrelse ud fra andre, som er kendte.
- Nogle formler er meget berømte!
 - $O = \pi * D$ (Omkredsen af en cirkel, $\pi = 3.14\dots$)
 - $E = m * c^2$ (Einsteins formel for energi og masse)
 - $K = m * a$ (Newton: Kraften = massen * accelerationen)
 - $c^2 = a^2 + b^2$ (Pythagoras formel for siderne i en retvinklet trekant)



Hvad gjorde vi uden den...

At "løse en ligning"

- Formålet med en ligning er at finde svar (et eller flere tal) på et spørgsmål.
- Vi skal finde ud af, hvad de ubekendte er værd (tal). Det kalder man "at løse ligningen".
- Fx:
 - Løs ligningen
 - $T - 8 = 500 / 80$
 - Hvor T er klokken, når jeg kommer til Århus
- For at løse en ligning bruger vi "regneregler"

Tænk på en vægt

Så længe vi lægger det samme til eller trækker det samme fra på begge skåle, bevares ligevægten.



OBS: Husk *Slide Show*

Regneregler for ligninger

En ligning forbliver sand, når man udfører de samme regneoperationer på begge sider af lighedstegnet.

Man må udføre alle de almindelige operationer, dog ikke gange eller dividere med NUL.

$$T - 8 = 520 / 80$$

<eksempel

$$T - 8 + 8 = 520/80 + 8$$

<læg 8 til på begge sider

$$T = 6\frac{1}{2} + 8$$

<udfør divisionen 520/80

$$T = 14\frac{1}{2}$$

<og vi har løsningen

Læs mere her:

[Reduktion \(7.-9. klasse, Algebra\) – Webmatematik](#)

Teknik ved løsning

- Man samler alle udtryk med den ubekendte på den ene side af ligningen, og samler alle andre udtryk på den anden side.
- Så reducerer man siden med den ubekendte til kun at indeholde den ubekendte gange 1.

$$\begin{aligned} 3x + 25 &= 7x + (12 - x)/6 && \text{<løs denne ligning for x>} \\ 3x + 25 &= 7x + 2 - x/6 && \text{<divider ind i parentesen – husk i alle led>} \\ 3x + 25 - 7x &= 7x + 2 - x/6 - 7x && \text{<træk 7x fra på begge sider>} \\ 3x + 25 - 7x + x/6 &= 2 - x/6 + x/6 && \text{<læg x/6 til på begge sider>} \\ 3x - 7x + x/6 &= 2 - 25 && \text{<træk 25 fra på begge sider>} \\ -4x + x/6 &= -23 && \text{<reducer udtrykkene>} \\ -4x * 6 + (x/6) * 6 &= -23 * 6 && \text{<gang på begge side – husk ALLE led – med 6>} \\ -24x + x &= -138 && \text{<reducer>} \\ -23x &= -138 && \\ x &= 6 && \text{<efter division med -23 har vi løsningen>} \end{aligned}$$

Opgaver – 1 ubekendt

- Løs følgende ligninger

$$5(4 + 2x) = 8(x + 9)$$

$$x - 6 = -7 + (3x - 5)$$

$$x - 6 = -7 - (3x - 5)$$

$$x - 4 = -3(x - 6) - (x - 3)$$

- Løs ligningen for (y/x)

$$20x + 40y = (x + y) \cdot 25$$

- Svar

$$x = 26$$

$$x = 3$$

$$x = 1$$

$$x = 5$$

- Svar

$$y/x = 1/3$$

Ligninger med flere ubekendte

- Ved de fleste praktiske anvendelser har vi flere ubekendte og flere ligninger.
- Vi kalder de ubekendte forskellige navne eller bogstaver, fx:

$$x + 5y = 22$$

$$2x - 7y = -7$$

- Opgaven at "løse systemet af ligninger" betyder: Find værdien af de ubekendte, som passer i (tilfredsstill) alle ligningerne i systemet.
- For at det skal være muligt, skal der være lige så mange ligninger, som der er ubekendte.
- Er der færre, kan man kun nå frem til nogle sammenhænge mellem de ubekendte.
- Er der flere, kan systemet være "overbestemt" og uden en løsning.

Tænk på en vægt

- *Substitution:* Melonen kan erstattes af tre æbler



Teknik ved løsning (2)

- To ligninger med to ubekendte løses nemt ved at *substituere* den ene variabel med den anden som i følgende eksempel.
- Eks: Løs de to ligninger for X og Y:

$$X + 5Y = 22 \quad (1)$$

$$2X - 7Y = -7 \quad (2)$$

Udtryk X ved Y vha den første ligning (1):

$$X = 22 - 5Y \quad (1B) \quad \text{<træk } 5Y \text{ fra på begge sider>}$$

Indsæt dette i ligning (2) :

$$2 * (22 - 5Y) - 7Y = -7 \quad \text{<brug parentes>}$$

$$44 - 10Y - 7Y = -7 \quad \text{<reducer>}$$

$$-17Y = -7 - 44 = -51$$

$$Y = 3 \quad \text{<Find selv X ved at indsætte Y i fx (1B)>}$$

Tænk på en vægt

- Vores kendte ligevægt tilføjes an anden ligevægt ->
- Citroner og druer er i ligevægt



Tænk på en vægt

- Måske gange 2?



Teknik ved løsning (3)

- En meget nyttig operation ved flere ligninger er at addere eller subtrahere ligninger fra hinanden.
- Eks: Løs de to ligninger for X og Y:

$$2X + 5Y = 22 \quad (1)$$

$$2X - 7Y = -2 \quad (2)$$

Træk ligning (2) fra ligning (1):

Venstre side trækkes fra venstre side, højre side fra højre side. Det må vi fordi, de to sider i hver ligning er ens (det er jo det lighedstegnet fortæller) og dermed trækker vi det samme fra på begge sider.

$$2X - 2X + 5Y - (-7Y) = 22 - (-2) \quad \text{<pas på med minusserne :->}$$

$$12Y = 24$$

$$Y = 2$$

<Find selv X ved at indsætte Y i fx (1)

Gode regler

- Lav kun én operation per linje i din løsning
- Vær omhyggelig med minus-tegnene
- Ret ikke i et udtryk, skriv en ny linje
- Man kan lave fejl, og så de er meget nemmere at finde, når hvert skridt står for sig
- Når du har løst en ligning, så gør "prøve", dvs indsæt dit svar i den oprindelige ligning, og tjek at det stemmer.
- Gør det for eksemplet på de forrige slides!
- Til en eksamen: Læs nøje, hvad der spørges efter!

Opgave m 2 ubekendte

Løs ligningsystemet

$$3y = 6x - 3$$

$$2x = 7 - y$$

Benyt *substitution*, dvs isoler den ene ubekendte i den ene ligning og sæt så udtrykket for den ind i den anden ligning.

Fx find fra den første ligning ved division med 3

$$y = 2x - 1$$

Dette udtryk for y indsætter vi derefter i den anden ligning

$$2x = 7 - \underbrace{(2x - 1)}_y$$

Hvorefter vi står med 1 ligning med 1 ubekendt, som vi løser let 😊

Opgave m 2 ubekendte

Løs ligningssystemet

Et ligningssystem består af ligningerne

$$y = 2x + 1$$

og

$$-25x + 5y = -30.$$

Løs systemet, og angiv svaret som decimaltal.

At stille en ligning op

- Når man skal løse et problem eller opgave, må man starte med at opstille ligningen eller ligningerne. Det er ofte det største problem!
- Hvad er min(e) ubekendte? Hvilke facts af betydning indgår?
- Har du flere ubekendte, skal du bruge flere ligninger. Helt præcist én ligning per ubekendt!
- OBS: Måske findes der en kendt formel for dit problem? En formel er jo bare en ligning, andre har stillet op. Det tjekker du først 😊

Opgave m 1 ubekendt

Om 7 år er Allan 3 gange så gammel, som han var for 5 år siden
Hvor gamle er Allan lige nu?

$$A + 7 = 3 * (A - 5)$$

$$\text{Løsning: } A = 11$$

Opgave m 1 ubekendt

-
- 6** Summen af en flok kænguruers aldre er 36 år.
Om 2 år er summen steget til 60 år.
- Hvor mange kænguruer er der i flokken?

59%

$$36 + 2 * N = 60$$

[Kænguruen-2019-6-7-med-svar-og-procent-rigtige-1.pdf \(kaenguruen.dk\)](#)

Opgave m 2 ubekendte

Albert har en datter Berit

Sidste år var Albert dobbelt så gammel, som Berit er om 1 år

Om 3 år er de tilsammen 69 år

Hvor gamle er Albert og Berit lige nu?

$$A - 1 = 2(B + 1)$$

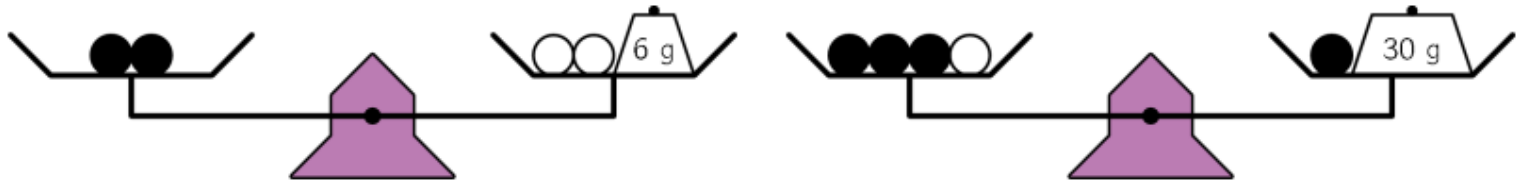
$$A + 3 + B + 3 = 69$$

Løsning: $A = 43$, $B = 20$

Opgave m 2 ubekendte

19 Seks identiske sorte perler og tre identiske hvide perler er lagt på vægtene som vist:

23%



Hvad er den samlede vægt af de 9 perler?

$$2*s = 2 *h + 6$$

$$3*s + h = s + 30$$

$$\text{Løsning: } h = 8 \text{ g; } s = 11 \text{ g}$$

$$6 s + 3 h = 90 \text{ g}$$

[Kænguruen-2019-6-7-med-svar-og-procent-rigtige-1.pdf](https://www.kaenguruen.dk/2019/06/07/med-svar-og-procent-rigtige-1.pdf) (kaenguruen.dk)

Opgave m 2 ubekendte

Penge

Hans har 7 kroner mere end Per.

Hans får 5 kroner af Per og har nu to gange så mange som Per har nu.

Hvor mange penge har de tilsammen?

$$H = P + 7$$

$$H + 5 = 2(P - 5)$$

Løsning:

$$H = 29, P = 22$$

Tilsammen 51



Opgave m 2 ubekendte

Et specielt tal

Find det største tocifrede hele tal, der er lig med 7 gange summen af tallets cifre.

Fx har cifrene i tallet 23 en sum: 5, som ganget med 7 er 35 (og 23 er derfor ikke en løsning)

Opstil en ligning med 2 ubekendte og løs opgaven uden at gætte! (*mine tilføjelser*)

$$a * 10 + b = 7(a+b) \rightarrow a = 2b$$

-> tallet er 84 (det kan ikke starte med 9)

Opgave m 3 ubekendte

-
- 22** Summen af Karens alder og Karens mors alder er 36.
Summen af Karens mors alder og Karens mormors alder er 81.

47%

Hvor gammel var Karens mormor, da Karen blev født?

$$K + M = 36$$

$$K = 0 \rightarrow M = 36$$

$$M + \text{Olde} = 81$$

$$M = 36 \rightarrow \text{Olde} = 45$$

Løsning: Olde = 45

Opgave m 3 ubekendte

13 I en have er der 30 dyr: hunde, katte og mus.

50%

En heks forvandler 6 hunde til katte.
Derefter forvandler hun 5 katte til mus.
Nu er der lige mange hunde, katte og mus i haven.

Hvor mange katte var der fra starten?

Tips: Ignorer alt andet end info om katte. ”?” Gælder katte!

$$K2 = K1 + 6$$

$$K3 = 30/3 = 10$$

$$K3 = K2 - 5$$

$$\text{Løsning: } K1 = 9$$

[Kænguruen-2019-6-7-med-svar-og-procent-rigtige-1.pdf \(kaenguruen.dk\)](#)

Opgave m 3 ubekendte

Jens Hansen har køer, høns og fluer!

I alt er der 80 dyr, 380 ben og 140 vinger

PS: En alm flue har 6 ben og to vinger

Hvor mange af hver slags er der på gården?

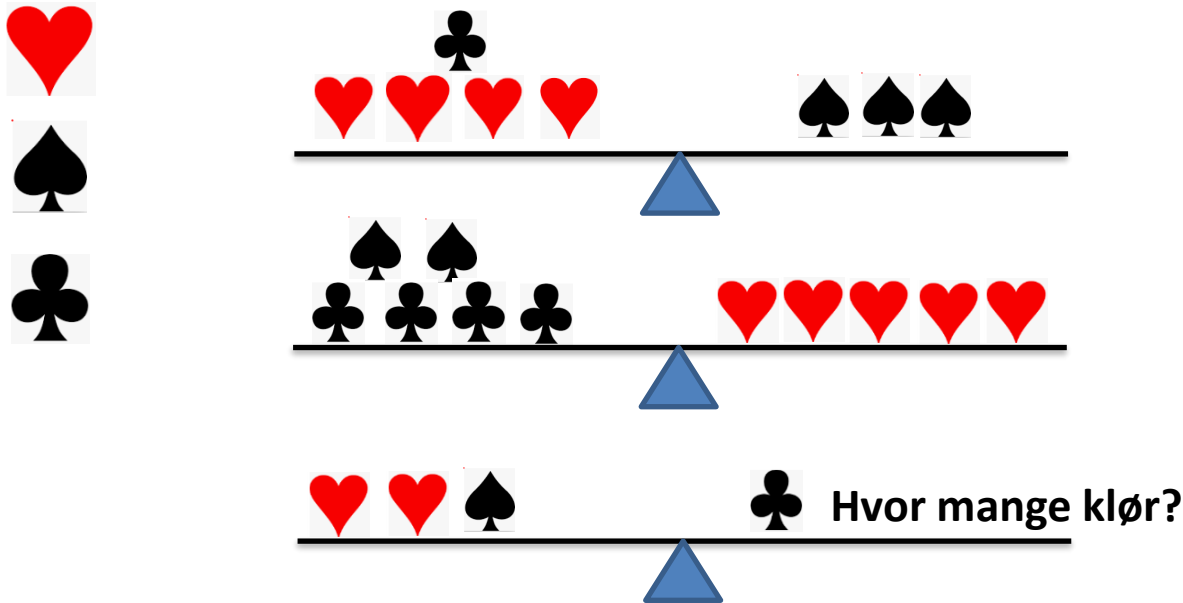
$$K + H + F = 80$$

$$4K + 2H + 6F = 380$$

$$2H + 2F = 140$$

Løsning 10 køer, 20 høns, 50 fluer

Opgave m 3 ubekendte



$$4 H + 1 K = 3 S$$

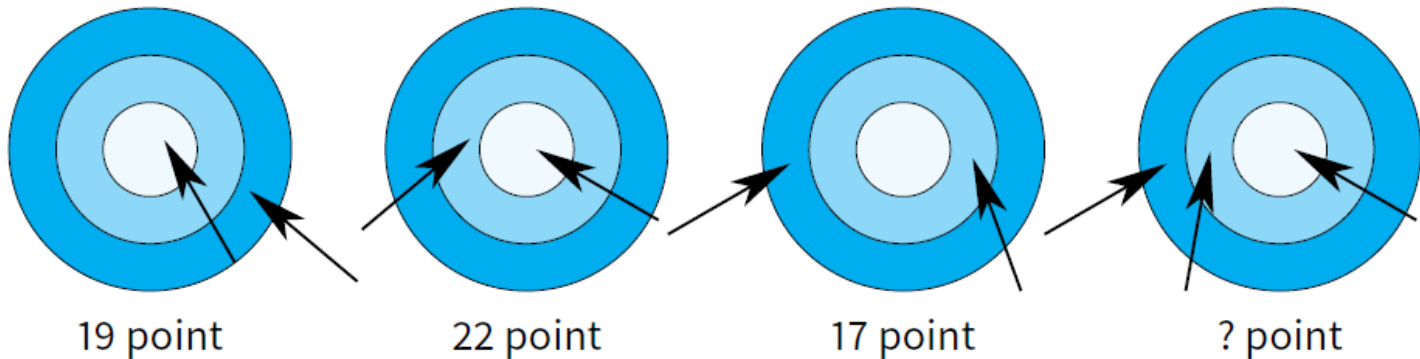
$$4 K + 2 S = 5 H$$

$$2 H + 1 S = ? \text{ KLØR}$$

Løsning: 7 klør

Opgave m 3 ubekendte

c) Asta fik først 19 point med to pile på målskiven.
Anden gang fik hun 22 point. Tredje gang fik hun 17 point.



I fjerde forsøg havde hun tre pile. Hvor mange point fik hun her?

Læreren tror på 29 point

Kænguruen 2018 udforskning af opgaverne

Opgave m 1 ubekendt



PROBLEM 1



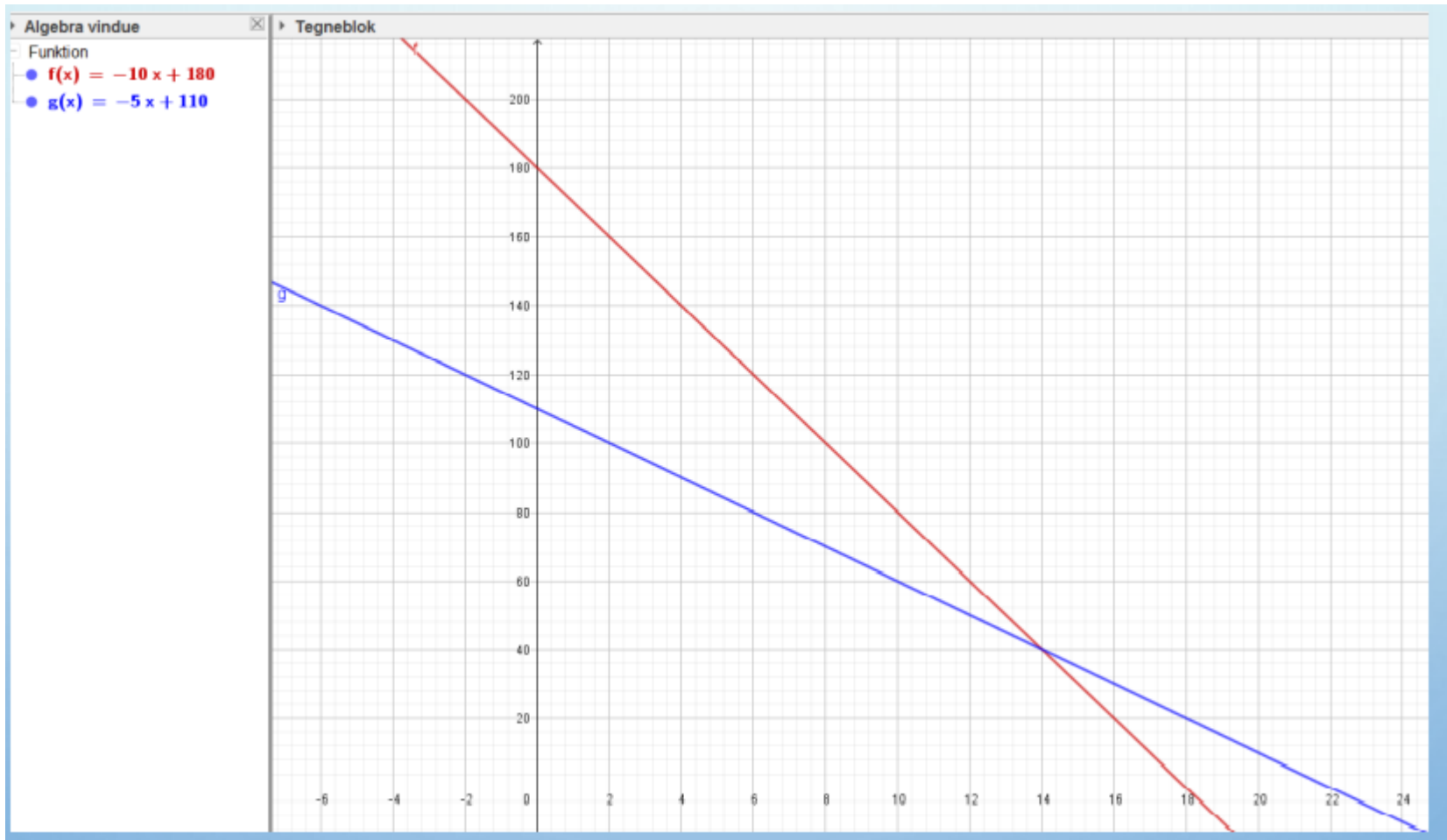
- JOHN HAR 18 TI-KRONER I SIN PUNG OG KARL HAR 22 FEM-KRONER I SIN PUNG
- DE BESLUTTER, AT DE HVER DAG VIL TAGE EN MØNT FRA DERES PUNGE OG LÆGGE I EN SPAREBØSSE, INDTIL EN AF DEM IKKE HAR FLERE PENGE I SIN PUNG.
- HVORNÅR HAR KARL FLERE PENGE END JOHN I SIN PUNG?

Løsning: dag 15 (dag 14 har de lige mange)

[Kirsten-Spahn-WS-1-Problemløsning.pdf](#)
([dkmat.dk](#))

Foredrag om problemløsning

Opgave løsning (forslag)



Dag 14 har de lige mange penge (40 kr), Dag 15 har Karl flest.

Opgaver m bevægelse

Mange opgaver – i virkeligheden – gælder bevægelse.

Vi ønsker fx at vide, hvornår et vist tog ankommer til et bestemt sted, eller hvor to tog mødes

Hvor lander den sten, jeg kaster? Og hvornår?

Isac Newton udviklede *infinitesimalregning* for at løse problemet med planeternes bevægelse om solen. Basis for al matematik og fysik i dag.

Her og nu må vi klare os med mindre, men vi kan løse mange simple opgaver 😊

Opgaver m bevægelse (2)

Når vi bevæger os, er der tre faktorer indblandede:

Hastigheden, strækningen og tiden

De er forbundne i følgende formel, som er *definitionen* af begrebet *hastighed*:

$$V = S / T$$

Hastigheden = strækningen / tiden

Vi kender det fra udtryk som: 100 km i timen eller 100 km per time eller 100 km / time

Opgaver m bevægelse (3)

Vi kan vende den formel ($V = S/T$) - på to måder:

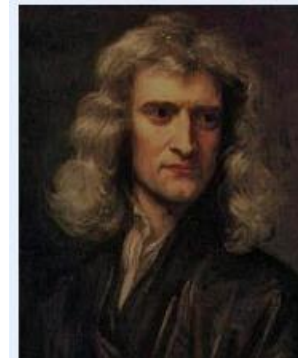
$$S = V * T$$

Strækningen = Hastigheden * Tiden

$$T = S / V$$

Tiden = Strækningen / hastigheden

Formlerne gælder **kun** ved en konstant hastighed, ellers må vi tale med Newton (kommer senere i denne biograf)



Opgaver m bevægelse (4)

Vi skriver lige formelen for "strækning" igen. Den er nemmest at huske. Så gør det! Lås den på nethinden!

$$S = V * T$$

Strækningen = Hastigheden * Tiden



=



*



Opgave

Et tog starter kl.8 i New York med retning mod Chicago, som ligger 440 km væk.

Toget kører 100 km i timen.

Samtidig starter et andet tog fra Chicago mod New York. Det kører med 120 km i timen.

HVOR mødes togene? Og HVORNÅR?

Tips: Brug formlen $S = V * T$, hvor S er strækningen, V hastigheden og T er tiden

Løsning: De mødes kl.10, 200 km fra New York

Opgave

Et tog starter kl.8 i New York med retning mod St.Louis, som ligger 450 km væk.

Toget kører 100 km i timen.

½ time senere starter et andet tog fra St.Louis mod New York. Det kører med 150 km i timen.

HVOR mødes togene? Og HVORNÅR?

Tips: Brug formlen $T = S / V$, hvor S er strækningen, V hastigheden og T er tiden

Løsning: De mødes kl.10.06, 210 km fra New York

Opgave

Et tog starter kl.8 i New York med retning mod St.Louis, som ligger 450 km væk.

Toget kører 100 km i timen.

1 time senere starter et andet tog fra New York mod St.Louis. Det kører med 150 km i timen.

HVOR mødes togene? Og HVORNÅR?

Tips: Brug formlen $T = S / V$, hvor S er strækningen, V hastigheden og T er tiden

Løsning: De mødes kl.11, 300 km fra New York. Afstanden til St.Louis er ligegyldig.

Opgave m mange ubekendte

Følgende Kænguru opgave er underbestemt, så vi kan ikke finde alle ubekendte, kun forholdet mellem dem! Men bemærk, at det netop er spørgsmålet!

Opstil 8? ligninger med 9? ubekendte. Tag udgangspunkt i formelen for hastighed: $V = S / T$ (V=hastighed, S=strækning, T=tid)

- 16** Mike går med en konstant hastighed, og han cykler med en konstant hastighed. 28%
Turen til skole tager 10 minutter på cykel og 30 minutter, når han går.
Evas hus ligger på Mikes skolevej.
Hvis Mike tager cyklen til Eva og går resten af vejen, så tager det 26 minutter.

Hvor stor en brøkdelen udgør turen fra Mike til Eva af hele Mikes skolevej?
-

Opgave

Ved jernbaneoverskæringen

Peter sidder i sin bil ved en jernbaneoverskæring og venter på at to tog skal passere.

Det er et dobbelt jernbanespor, så togene kan passere hinanden uden at kollideres.

Først kommer et hurtigtog som passerer på 9 sekunder.

Derefter kommer i modsat retning et godstog som passerer på 54 sekunder.

Hurtigtoget kører dobbelt så hurtigt som godstoget.

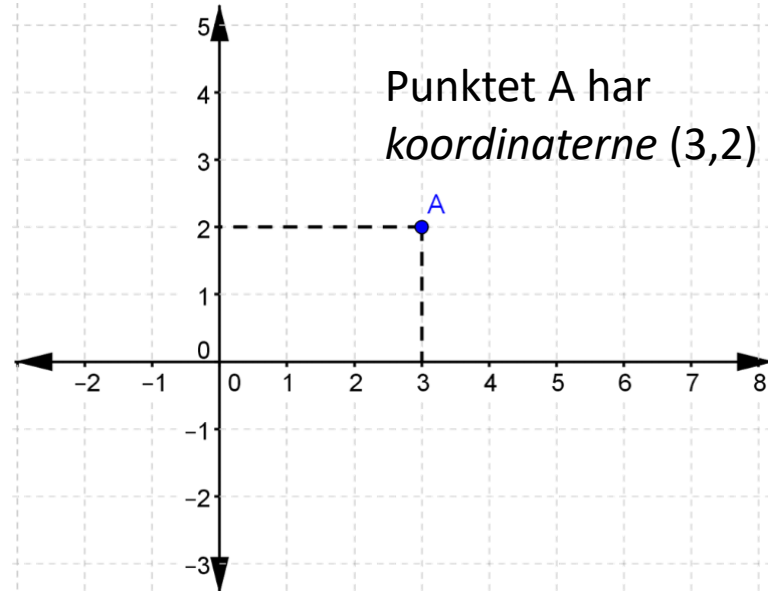
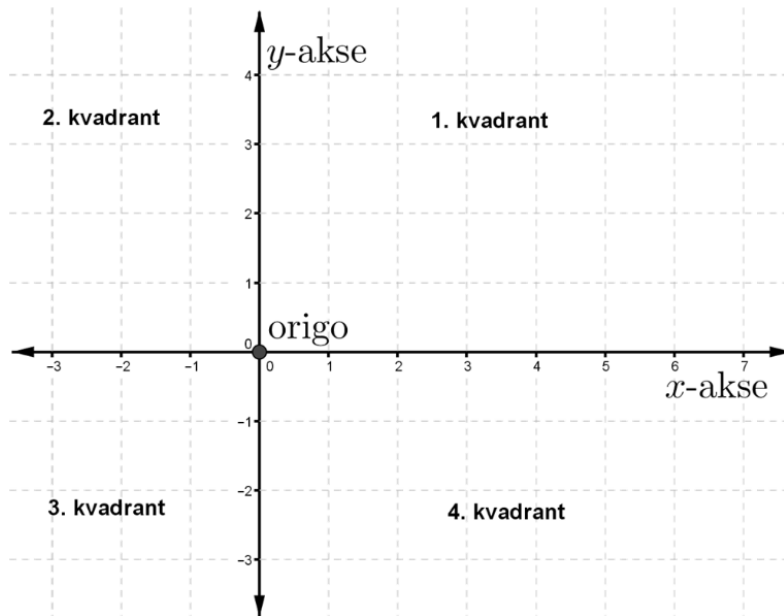
Hvor lang tid tog det for togene at passere hinanden fra det tidspunkt hvor lokomotiverne mødtes, og til de sidste vogne havde passeret hinanden?

Funktioner basic

- Koordinatsystemet
- Hvad er en funktion
- Grafisk afbildning af en funktion
- Den lineære funktion – rette linjer
- Grafisk løsning af ligninger
- Polynomier og parablen
- 2nd grads ligninger

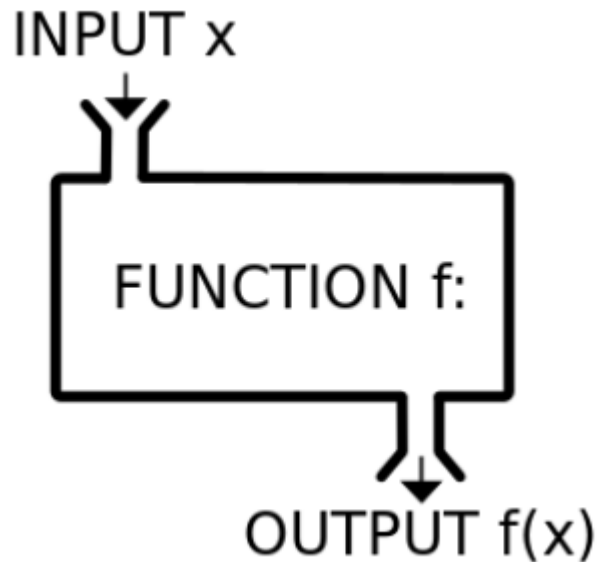
Koordinatsystemet

- Et (Cartesisk) *koordinatsystem* består af to akser, der står vinkelret på hinanden.
- Den vandrette akse kaldes *x*-aksen. Den lodrette *y*-aksen. Skæringspunktet kaldes *origo*.



Funktioner

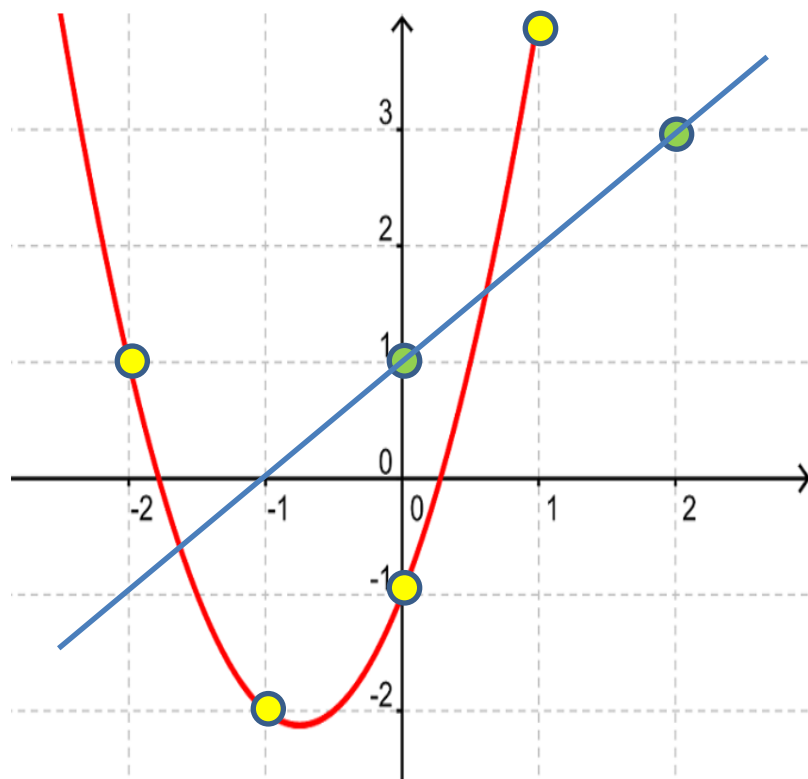
I matematik er en *funktion* en regel, der til hvert x af en given mængde knytter nøjagtigt et y . Man kan forstå en funktion som en slags maskine, hvor man kommer et x ind, og så får et y ud på den anden side.



" y er en funktion af x "
Vi skriver: $y = f(x)$

Grafisk afbildning af funktioner

Man får en grafisk afbildning ved at plote sammenhørende x og y ind i et koordinatsystem



Den blå graf er en lineær funktion:

$$Y = X + 1$$

Den røde er en kvadratisk funktion:

$$Y = 2X^2 + 3X - 1$$

Begge funktioner er sammenhængende (kontinuerlige), men det er ikke altid sådan.

Lineær funktion – ret linje

- [Lineær funktion \(7.-9. klasse, Funktioner\) – Webmatematik](#)
- [Eksempler på lineære funktioner \(7.-9. klasse, Funktioner\) – Webmatematik](#)
- [Lineære funktioner \(Matematik C, Funktioner\) – Webmatematik](#)

Lineær funktion – ret linje

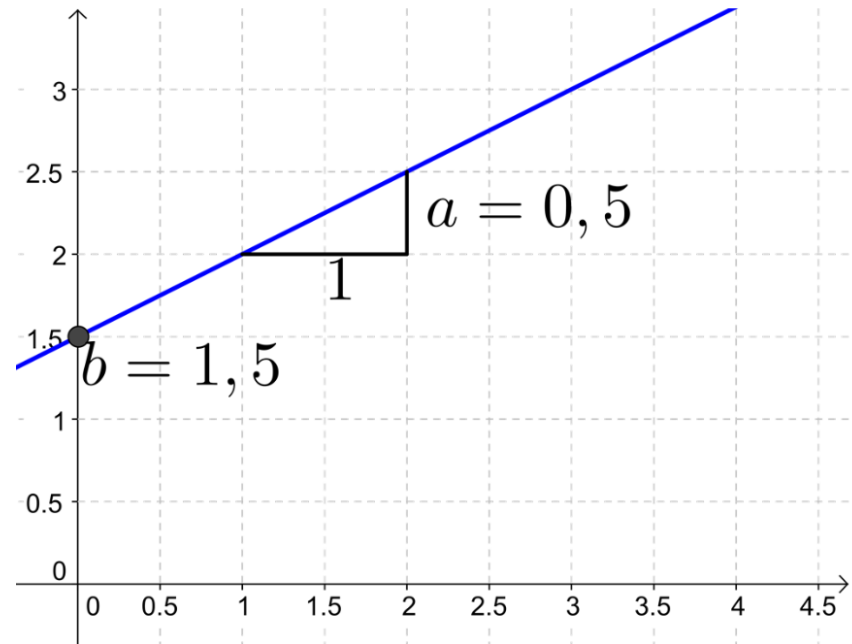
En *lineær* funktion har følgende form

$$y = ax + b$$

hvor a og b er konstanter.

I et koordinatsystem afbildes den som en ret linje.

a siger noget om hældningen og kaldes også linjens *hældningskoefficient*. b fortæller, hvor på y -aksen linjen skærer (sæt $x = 0$)



Eksempel: $Y = 0.5 X + 1.5$

Opgave - Ret linie

Tegn forskellige rette linjer på kvadreret papir, og se hvordan a og b påvirker linjen. Hvad sker, når x vokser med 1?

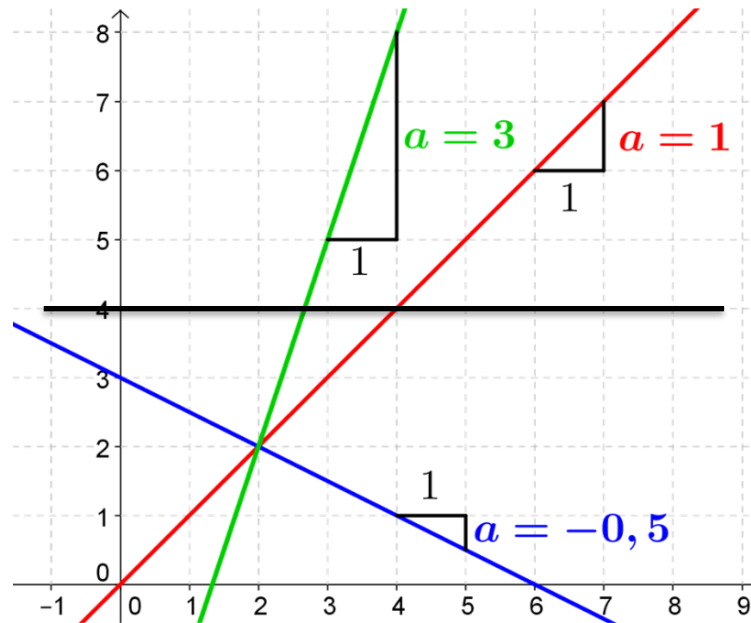
$$y = x$$

$$y = 2x + 2$$

$$y = -x + 2$$

$$y = -2x - 1$$

Skriv ligningerne for linjerne
I figuren!



Andre eksempler

Ret linje – udled ligning

Ofte får vi ikke a og b oplyst, men skal selv finde linjens ligning ud fra andet.

Der er tre muligheder:

1. Vi får to punkter oplyst, eller
2. Vi får et punkt plus hældningen, a , eller
3. Vi får et punkt plus b .

Vi laver de første her, den sidste laver du selv 😊

[Find \$a\$ og \$b\$ \(lineær\) \(Matematik C, Funktioner\) – Webmatematik](#)

Find a og b ud fra 2 punkter

Vi kalder punkterne (x_1, y_1) og (x_2, y_2)

Vi ser umiddelbart fra de ligeformede trekanter at

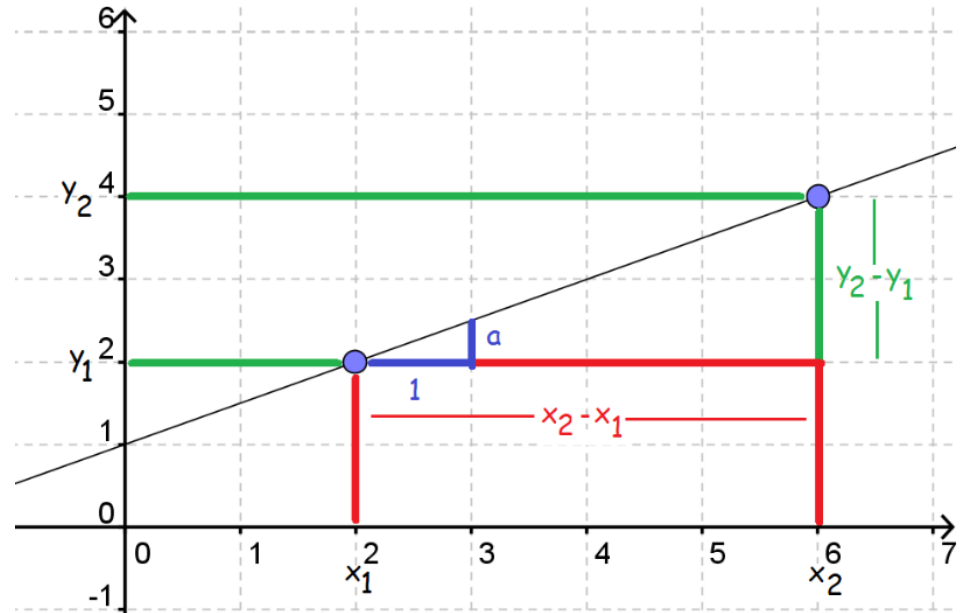
$$\frac{a}{1} = a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Benyt nu at fx pkt 1 ligger på linjen:

$$y_1 = a \cdot x_1 + b$$

Indsæt det fundne a og find

$$b = y_1 - a \cdot x_1$$



Med talværdier indsat, kan vi nu opskrive $y = ax + b$

OBS at udtrykket for a, får vi brug for igen og igen

Find a og b ud fra 2 punkter

Taleksempel: De to punkter er (2,2) og (6,4) som på tegningen.

Vores "formel" for a:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

giver så:

$$a = (4 - 2) / (6 - 2) = 2 / 4 = 1/2$$

Benyt nu at fx pkt 1 ligger på linjen:

$$y_1 = a \cdot x_1 + b$$

Dvs $2 = \frac{1}{2} \cdot 2 + b$

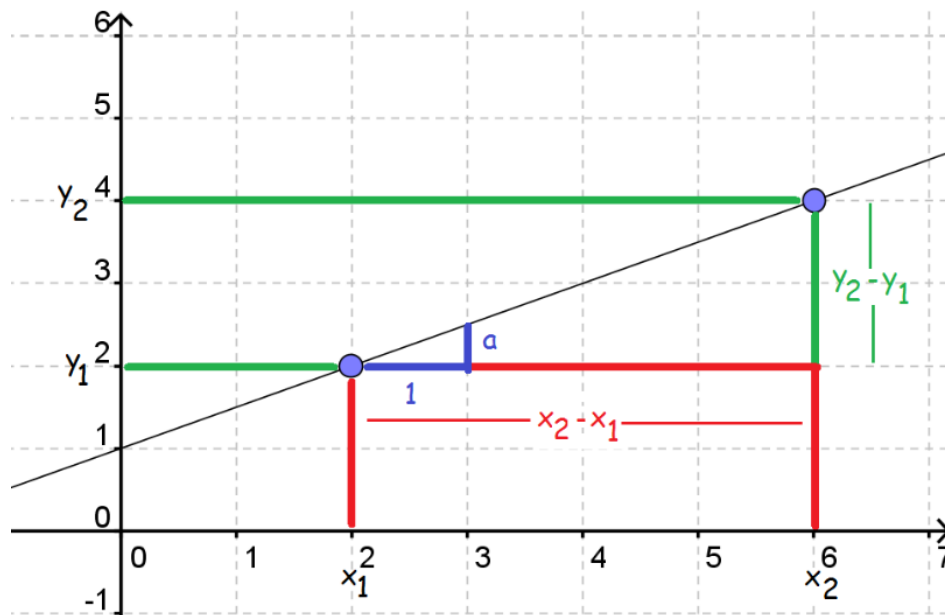
$$b = 2 - 1 = 1$$

(hvad vi også let ser på tegningen)

Den færdige ligning for vores linje er derfor

$$y = ax + b$$

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$



Find b ud fra 1 punkt og a

Denne gang kender vi punkt (x_1, y_1) samt a . (Punkt (x_2, y_2) kender vi ikke).

Benyt nu at pkt 1 ligger på linjen:

$$y_1 = a \cdot x_1 + b$$

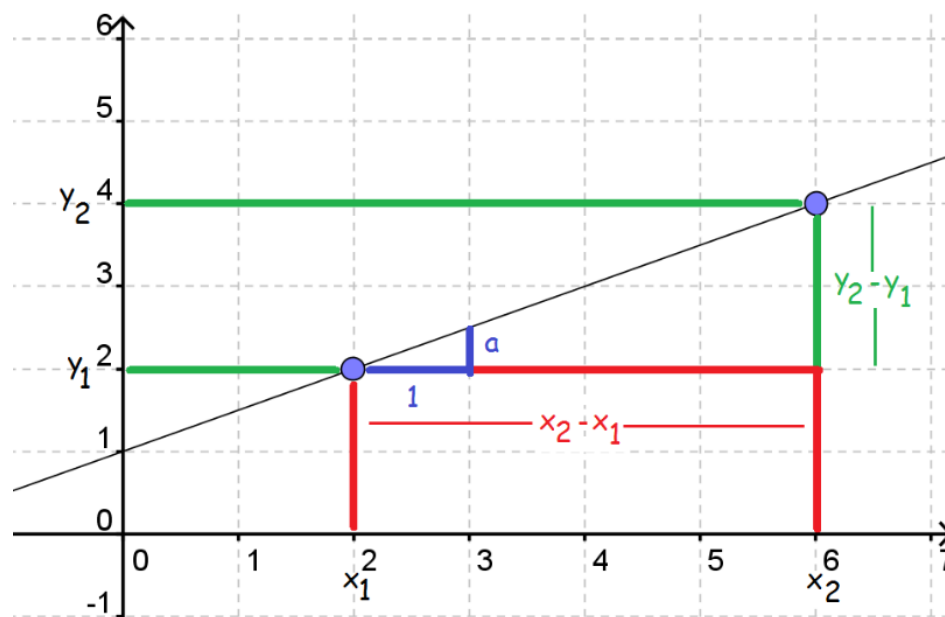
Indsæt de kendte tal for a , x_1 og y_1
Og vupti...

$$b = y_1 - a \cdot x_1$$

Med tal fra figuren har vi straks

$$b = 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

(hvilket vi også kunne aflæse af figuren)



Alternativ ligning for en ret linje

En alternativ ligning for en ret linje tager udgangspunkt i vores "formel" for a :

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Betragt (x_2, y_2) som et "løbende" punkt, og vi kan skrive linjen som

$$y - y_1 = a (x - x_1)$$

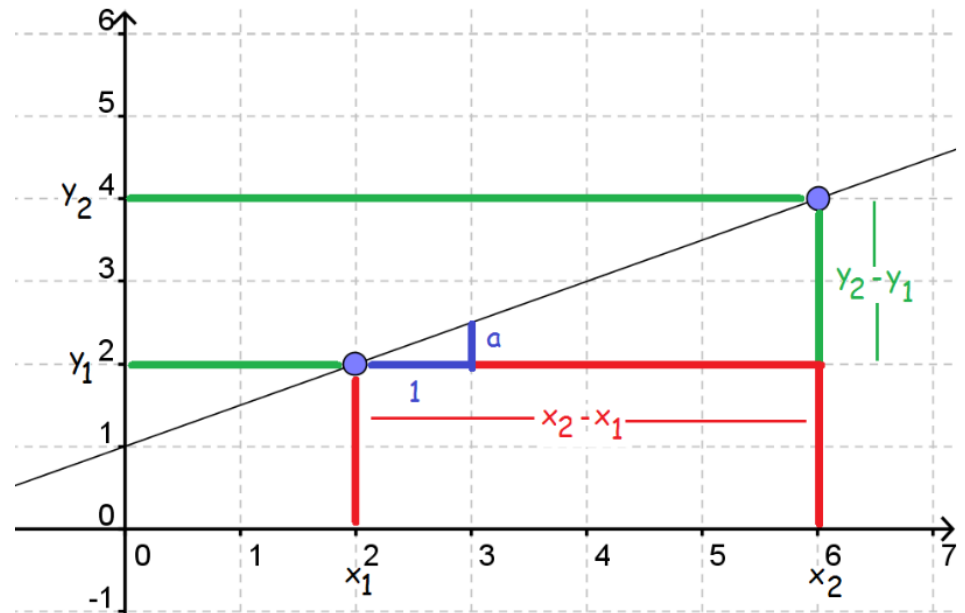
Hvor altså a , x_1 og y_1 er kendte.

Indsætter man et x , kommer der et y ud, (og vice versa).

Med tal fra figuren kan vi skrive

$$y - 2 = \frac{1}{2} * (x - 2)$$

Denne form for ligningen er nyttig, når man søger differencer mellem y -værdier



Opgave

1. Grafen for en lineær funktion går gennem punkterne $(12,2)$ og $(24,8)$. Bestem a og b .
2. Grafen for en lineær funktion går gennem punkterne $(-4,14)$ og $(8,-10)$. Bestem a og b .

Løsning 1: $a = 1/2$, $b = -4$

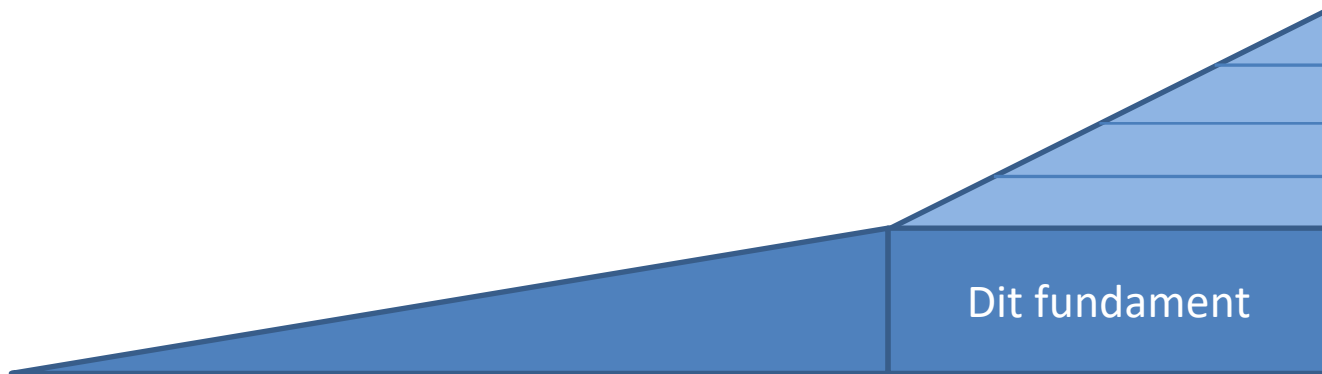
Løsning 2: $a = -2$, $b = 6$

Opgave

Den dobbelte trekant har en overside med to rette linjer. Antag at hældningerne er $1/3$ og $2/3$.

Folkeskolen er 9 år og gymnasiet er 3 år.

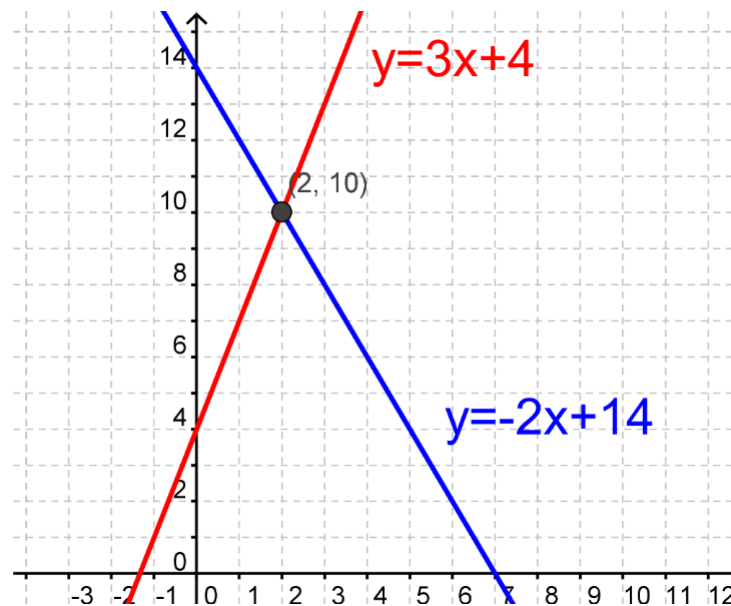
Hvad er y -værdien, når du slutter i gymnasiet?



To ligninger med to ubekendte

Hvis vi har to lineære ligninger kan de afbildes som to rette linjer.
Hvor de skærer hinanden finder vi løsningen

$$\begin{aligned}y &= 3x + 4 \\2x + y &= 14.\end{aligned}$$



Opgave

Løs opgaverne med tog grafisk (slide 92-94)

Brug S som første akse, T som anden akse

Opgave m tog 3

Brug formlen

$$T = S / V$$

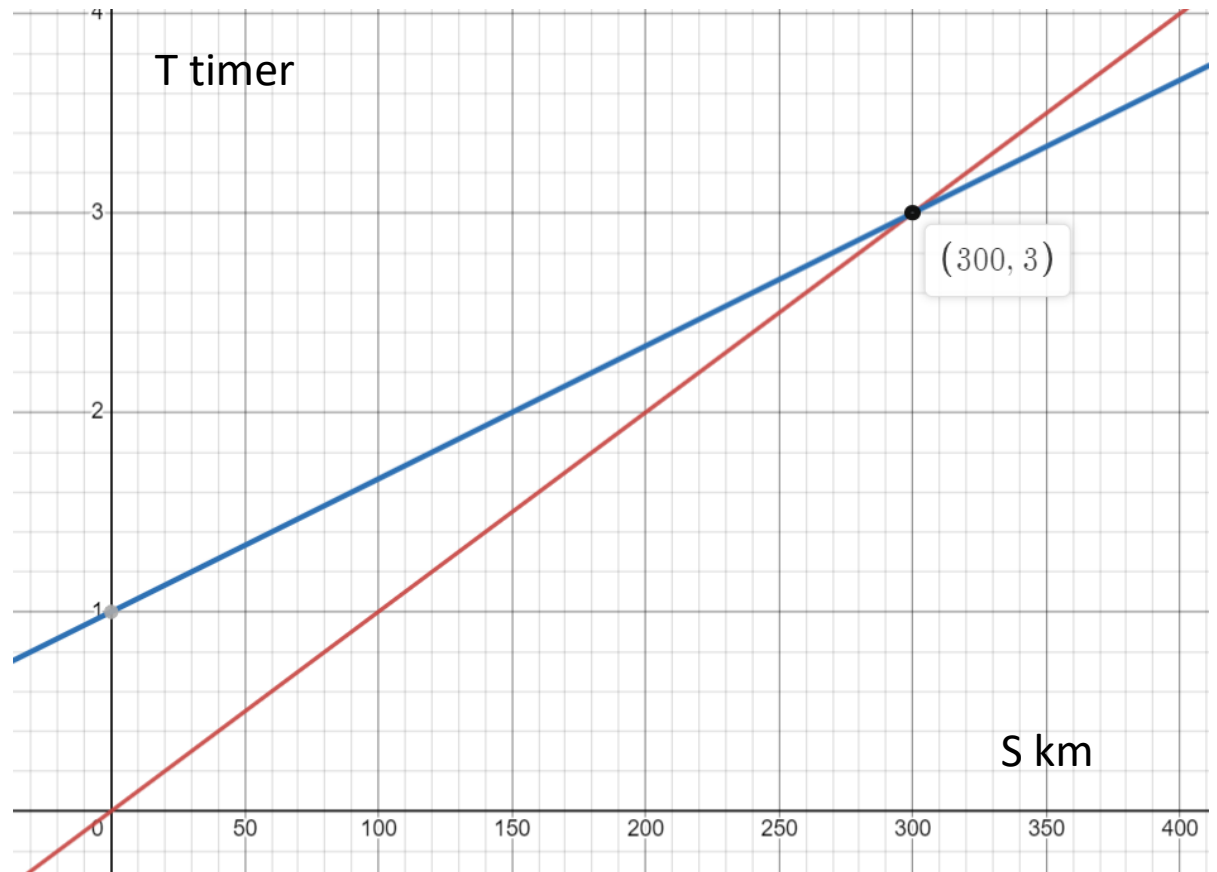
Tog 1 kører 100 km/t

$$t = (1/100) * s$$

Tog 2 kører 150 km/t
og starter 1 time
senere

$$t = (1/150) * s + 1$$

De mødes 300 km
væk efter 3 timer



Opgave

De to ligninger med to ubekendte herunder kan ikke løses. Prøv!

$$2x + 4y = 3$$

$$3x + 6y = -2$$

Brug en grafisk fremstilling til at forklare hvorfor, de ikke kan løses.

Læs mere om dette her (determinantmetoden)

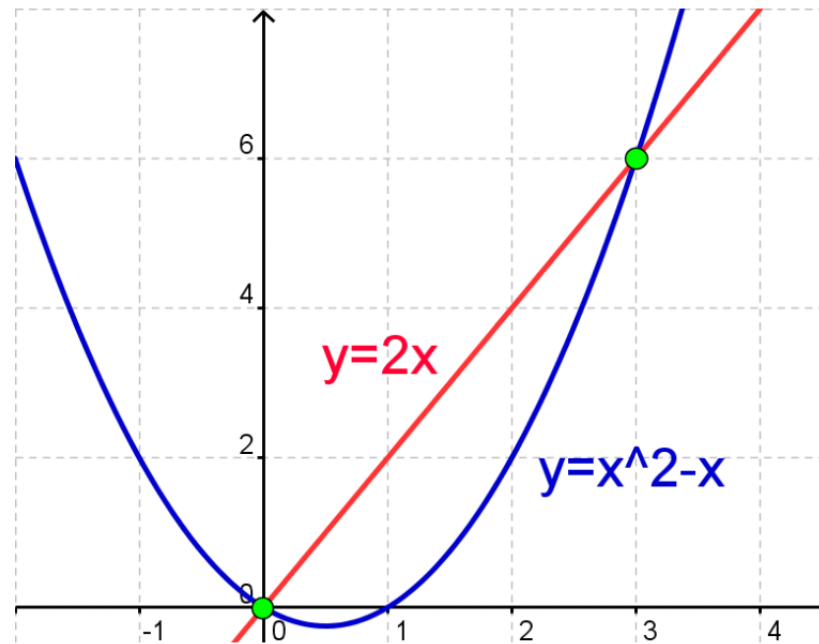
[To ligninger med to ubekendte \(Matematik C, Ligninger\) – Webmatematik](#)

To ligninger med to ubekendte

Ligningerne kan være af hvilken kompleksitet som helst
Et eksempel med en parabel og en ret linje

$$\begin{aligned}2y + 2x &= 2x^2 \\ y - 2x &= 0\end{aligned}$$

Vi kan aflæse de to løsninger:
(0,0) og (3,6)



Opgave

Løs ligningerne på foregående slide.

$$\begin{aligned}2y + 2x &= 2x^2 \\ y - 2x &= 0\end{aligned}$$

Tips: Brug grafen eller dit instinkt til at finde den første løsning (0,0). Regn dig derefter frem til den anden.

Ortogonale linjer

- [Ortogonale linjer \(Matematik B, Geometri\) – Webmatematik](#)

Video-beviset tager en krig. Se vores lyn-bevis på næste side 😊

Ortogonale linjer

Når to linjer krydser hinanden med en vinkel på 90 grader imellem dem, siges de at være *ortogonale*. De står vinkelret på hinanden.

På figuren er de to linjer ortogonale. Hvis den blå linje har hældningen a , og den røde b , ser vi af de ligedannede trekanter:

$$|a_1|:1 = 1:|a_2|$$

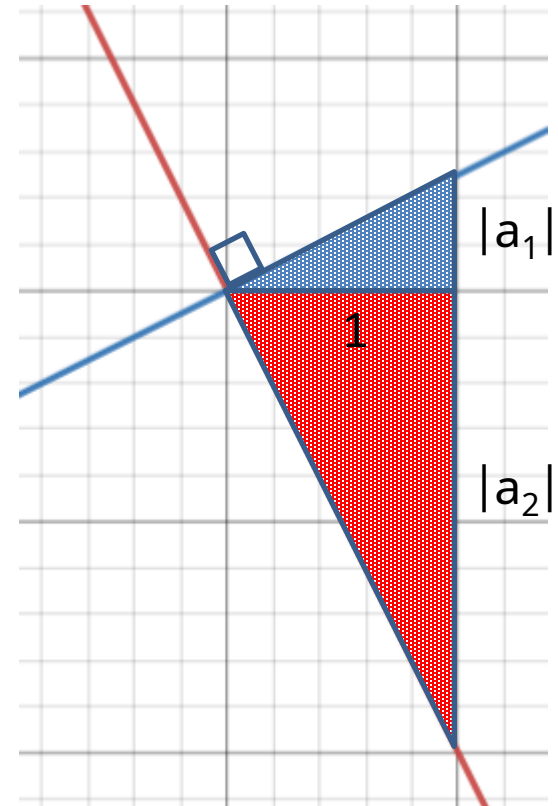
eller $|a_1||a_2| = 1$

Da 1 af dem altid er negativ (se figur) gælder altså

$$a_1 * a_2 = -1$$

for ortogonale linjer!

(Linjerne i opgaven slide 112 er ortogonale. Stemmer det?)



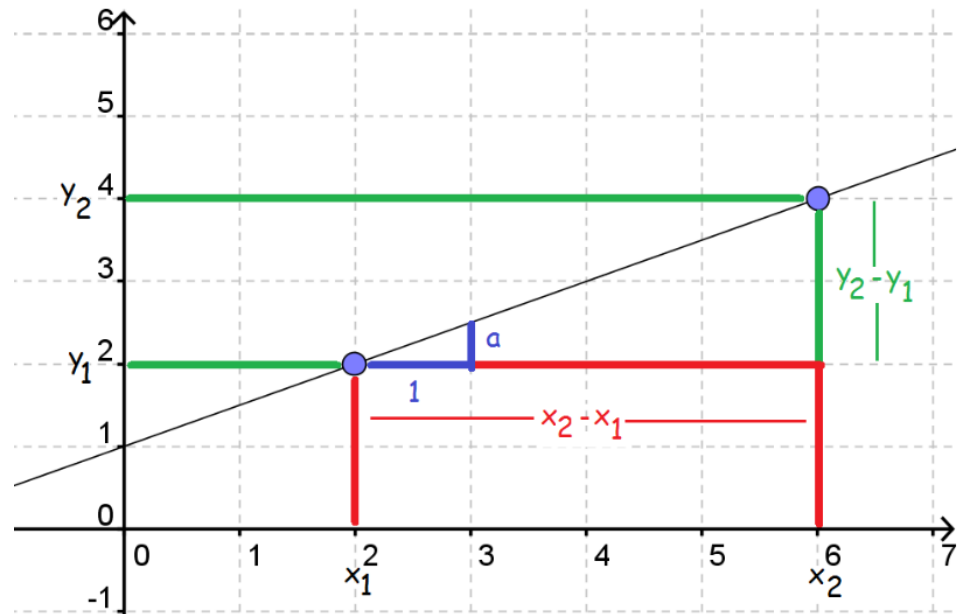
Afstandsformlen

- [Afstandsformlen \(Matematik B, Geometri\) – Webmatematik](#)

Afstanden mellem to punkter i x-y-planen er ren Pythagoras.

Det klarer du selv!

Find afstanden mellem De to blå punkter.



Distanceformlen

[Distanceformlen \(Matematik B, Geometri\) – Webmatematik](#)

Har en video med et unødigt besværligt bevis, som til med kun skitseres

[Distance from a point to a line – Wikipedia](#)

Mange (også korte) beviser

[Analytisk Geometri - Bevis: Afstand fra Punkt til Linje \(\$y=ax+b\$ version\) \(uden vektorregning\) - YouTube](#)

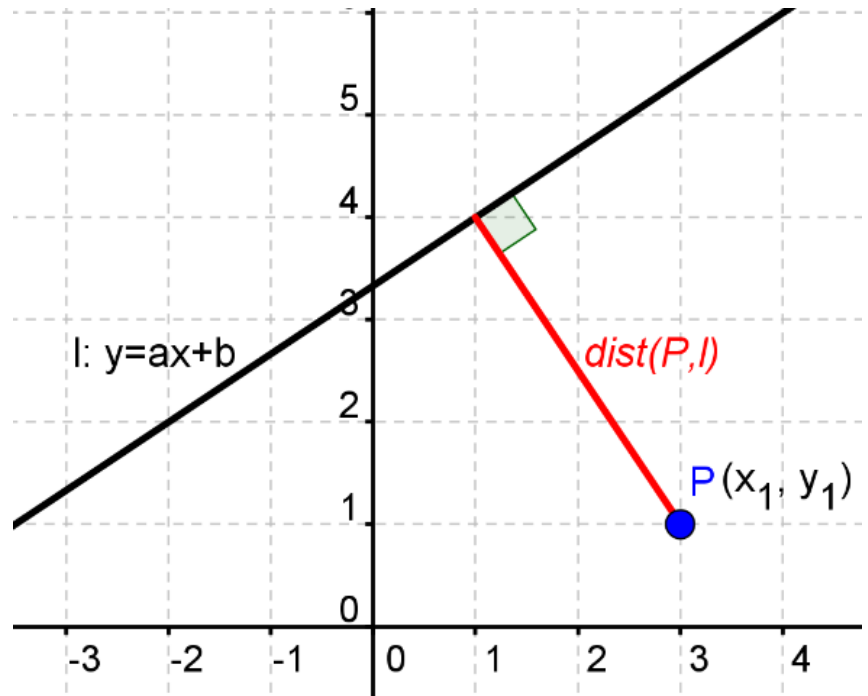
Distanceformlen

Distanceformlen bruges til at bestemme den korteste afstand mellem en ret linje og et punkt

Vi kalder vores rette linje for l , og vores punkt for P . l har ligningen $y=ax+b$, og P har koordinatsættet (x_1, y_1) . Den korteste afstand mellem P og l er

$$\text{dist}(P, l) = \frac{|ax_1 + b - y_1|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

Tydeligvis den vinkelrette afstand.
Vi beviser den i en hjemmeopgave.
Tips: Udnyt at linjerne er ortogonale!



Polynomier

Et polynomium er en funktion $y = f(x)$, hvor x optræder opløftet til forskellige potenser.

Eksempel

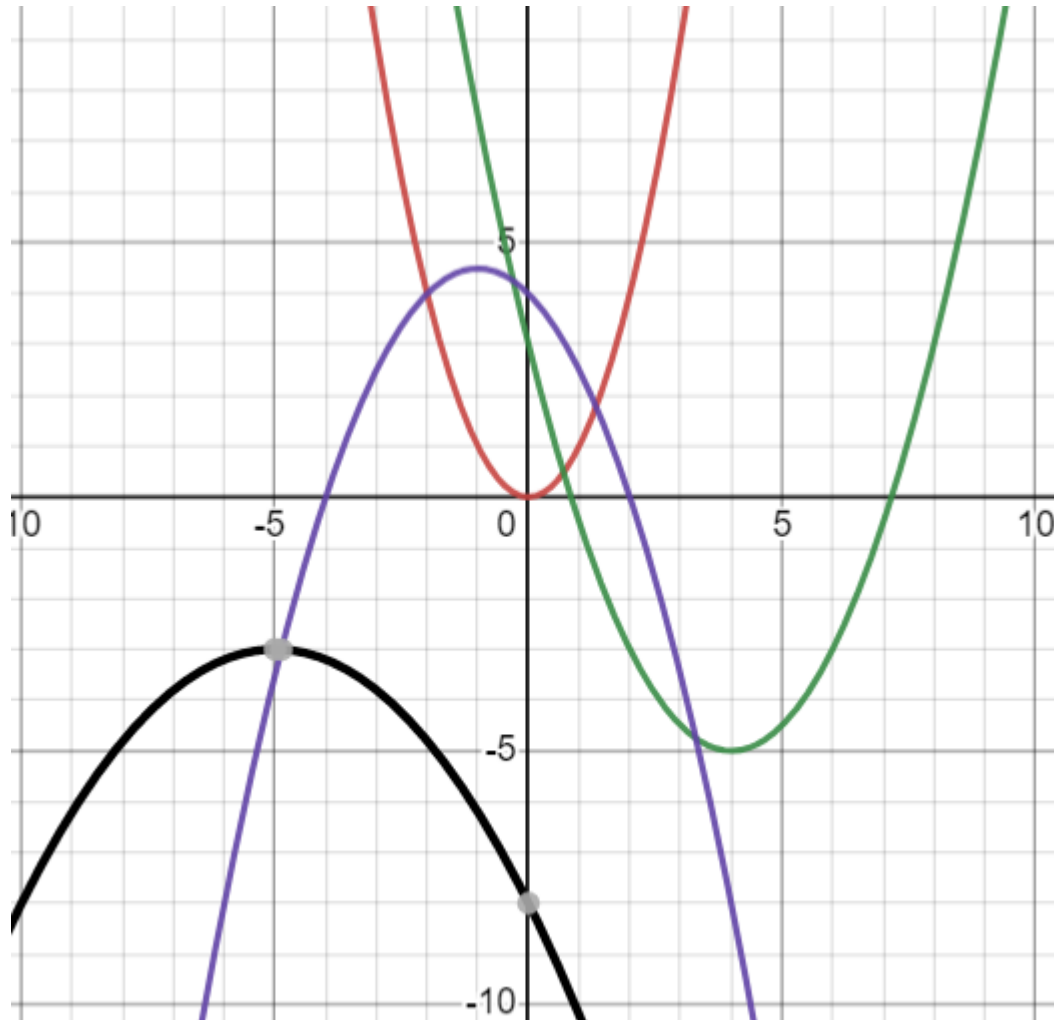
$$y = x^4 + 12x^3 + x - 12$$

Det vigtigste polynomium er 2. grads polynomiet, som generelt skrives

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Den grafiske afbildning af 2. grads polynomiet kaldes en *parabel*

Parablen



Figuren viser
forskellige parabler

$$y = x^2$$

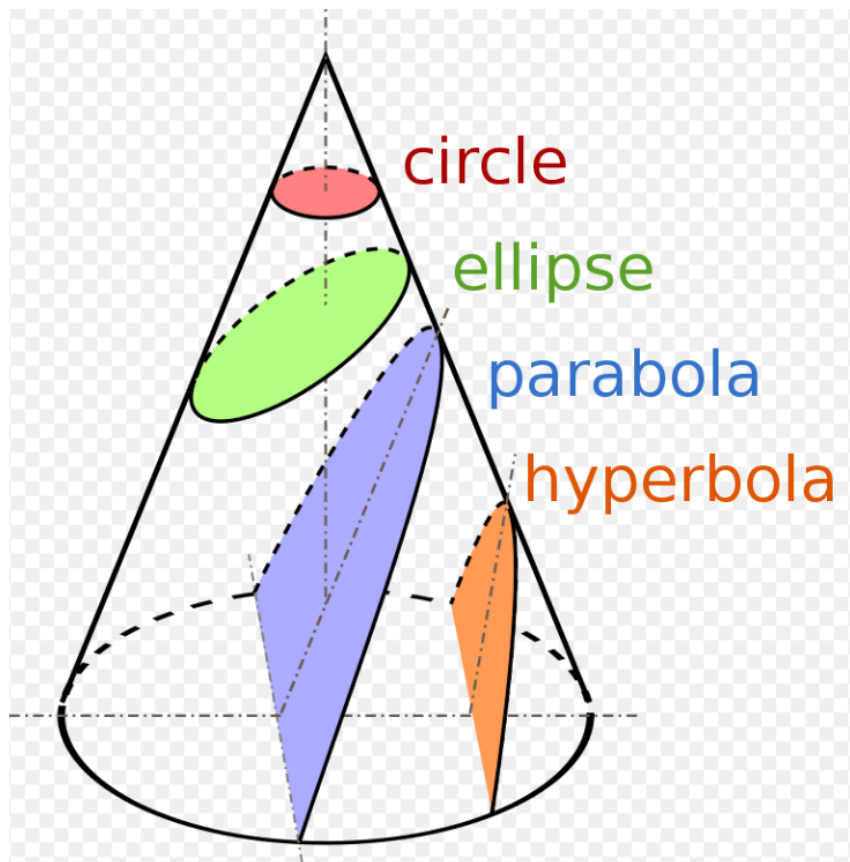
$$y = 0.5x^2 - 4x + 3$$

$$y = -0.5x^2 - x + 4$$

$$y = -0.2x^2 - 2x - 8$$

Kan du se et
mønster?

Parablen er et "keglesnit"



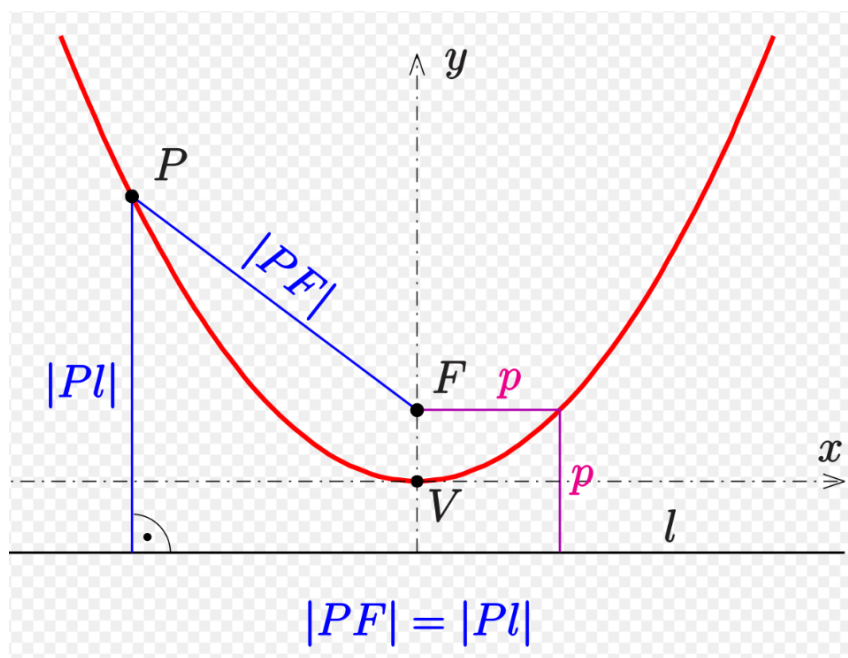
Parablen tilhører den fine familie af *keglesnit*

Familien omfatter de geometriske objekter på figuren.

Der er skrevet tykke bøger om deres forskellige egenskaber

[Conic section - Wikipedia](#)

Parablen som *geometrisk sted*



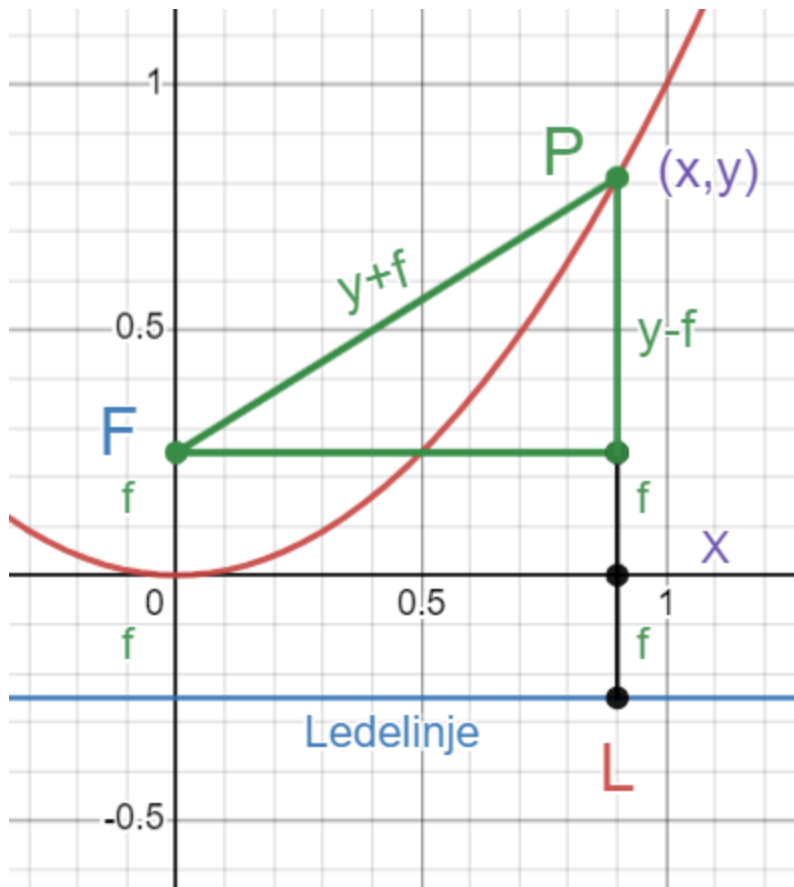
Parablen er det *geometriske sted* for punkter, som ligger lige langt fra et punkt og en ret linje.

Punktet (F) kaldes *brændpunktet*, linjen (l) kaldes *ledelinjen*.

Punktet V kaldes *toppunktet* (på engelsk *vertex*)

At det leder til et andengrads polynomium, beviser vi på næste slide.

Parablen som 2. grads polynomium



Fra definitionen af en parabel:

$$|PF| = |PL|$$

hvilket giver os siderne i den grønne, retvinklede trekant som på figuren:

$y+f$, $y-f$ og x

Pythagoras giver derefter

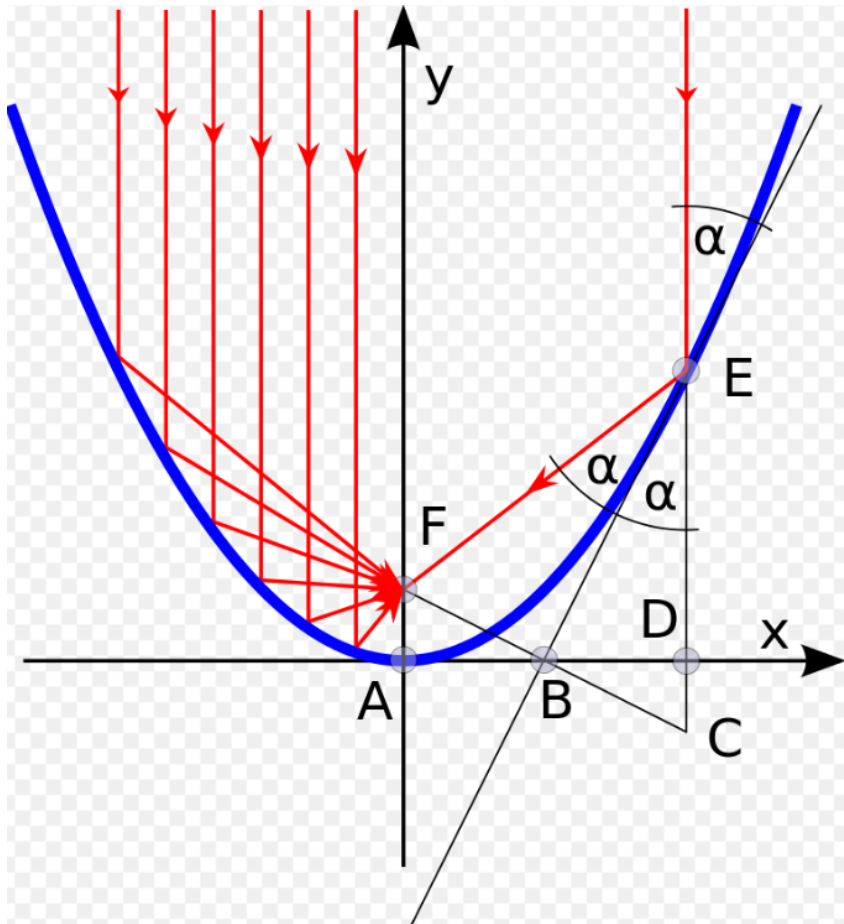
$$x^2 + (y-f)^2 = (y+f)^2$$

$$x^2 + y^2 + f^2 - 2fy = y^2 + f^2 + 2fy$$

De røde tager hinanden ud, hvorefter vi får:

$$y = \frac{1}{4f} * x^2$$

Parablens egenskaber



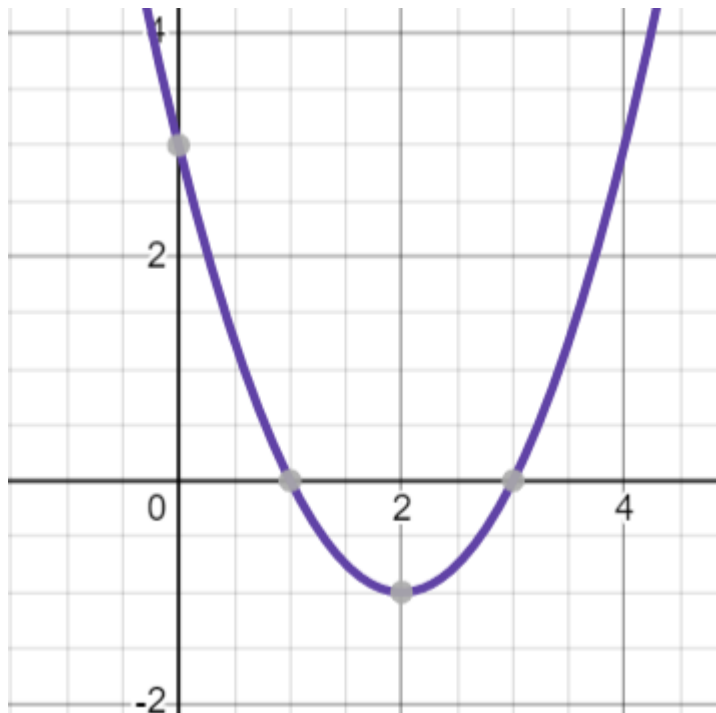
Når parallelle stråler indfalder på en parabel, som reflekterer, samles de i brændpunktet (deraf navnet).

Det omvendte gælder selvfølgelig.

Så et teleskop, en parabolantenne og en lygte med en pære i, er formet som en parabel.

(Vi beviser det senere)

Andengradsligningen



En andengradsligning er en ligning på formen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Fx $x^2 - 4x + 3 = 0$ (billedet)

Ligningens løsninger (kaldet *rødder*) findes af formlen

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(vi beviser den senere)

Opgave: brug den på **polynomiet på figuren**

Bevægelser efter parabler



Al fri bevægelse uden motor følger parabler.
Basket balls og springvand. Hvorfor?

Bevægelse med varieret hastighed

Indtil nu har vi kun studeret bevægelse med konstant hastighed, V .

Vores formel: $S = V * T$ gælder kun der.

Hvad nu hvis hastigheden ændrer sig?

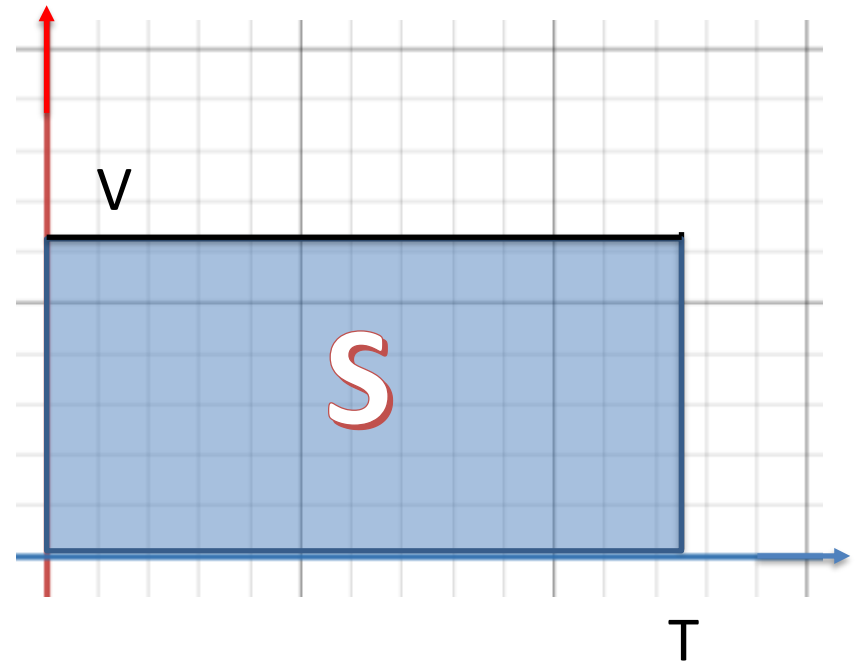
I det helt generelle tilfælde skal vi bruge Newton, men mindre kan gøre det i enkle tilfælde, oven i købet et meget vigtig sådan! Nemlig det frie fald.

Bevægelse med varieret hastighed

Hvis vi bevæger os med konstant hastighed og afbilder det i et koordinatsystem med T og V som akser, vil vi se en lige linje:

Den tilbagelagte afstand er (som vi ved): $S = V * T$.

Men det er jo præcis arealet under kurven.



Bevægelse med varieret hastighed

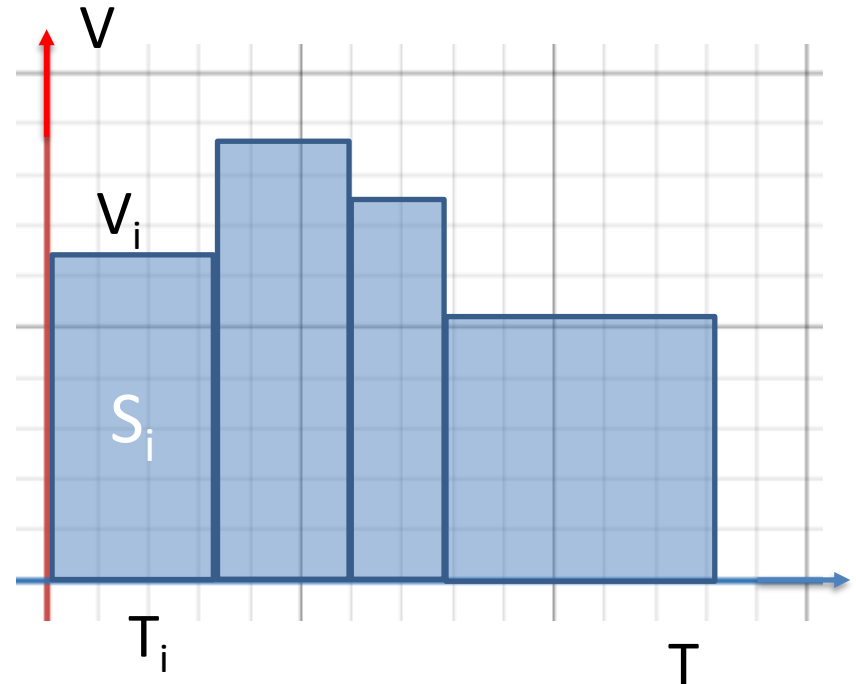
Hvis hastigheden skifter, men forbliver konstant i små afsnit, får vi en figur som ved siden af.

Nu er det totale areal, S , summen af de små arealer

$$S_i = V_i * T_i.$$

Man skriver

$$S = \sum V_i * T_i$$



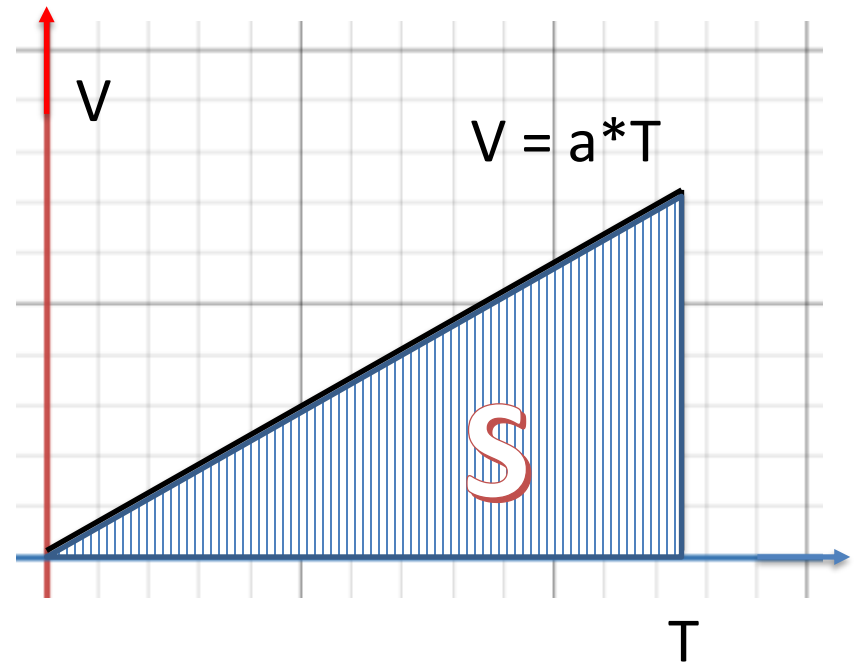
Bevægelse med konstant acceleration

Hvis hastigheden er konstant stigende efter en ret linje, kan vi benytte formlen for en ret linje med hældningen a :

$$V = a * T$$

” a ” kaldes *accelerationen*, som i dette tilfælde er konstant.

Lægger vi nu alle de små rektangler sammen, får vi at strækningen, S , er arealet af trekanten:



$$S = \sum V_i * T_i = \frac{1}{2} * aT * T$$

Dvs

$$S = \frac{1}{2} * V * T = \frac{1}{2} * aT^2$$

Bevægelse med konstant acceleration

Kan vi bruge det til noget?

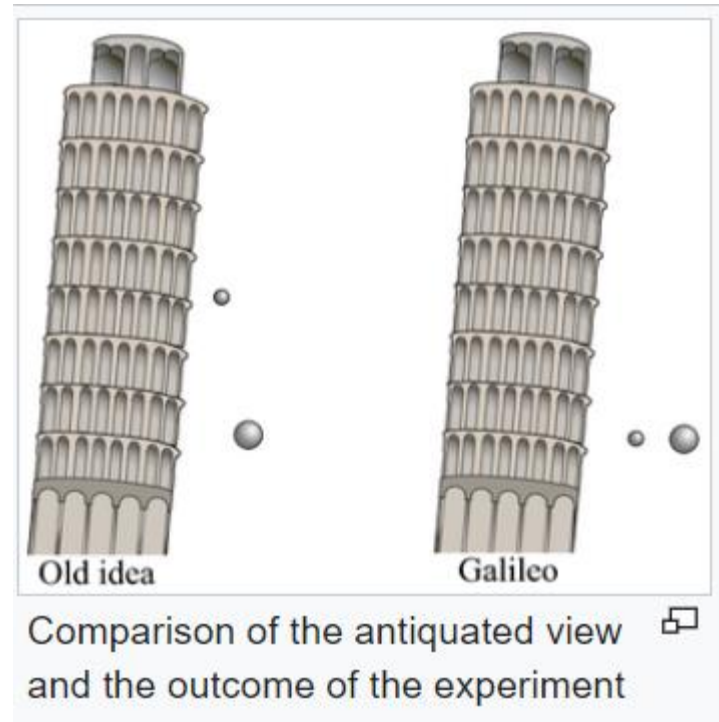
Omkring år 1500 fandt nogle kloge ud af, at alt falder med samme, konstante acceleration!

Den kaldes *tyngdeaccelerationen* og normalt i fysik "g" (fra *gravity*). Ved jorden er den ca 9,81 m/s².

Så det, vi lige har udledt, er ligningen for et frit fald! Vi fandt:

$$V = g * T$$

$$S = \frac{1}{2} * g * T^2$$

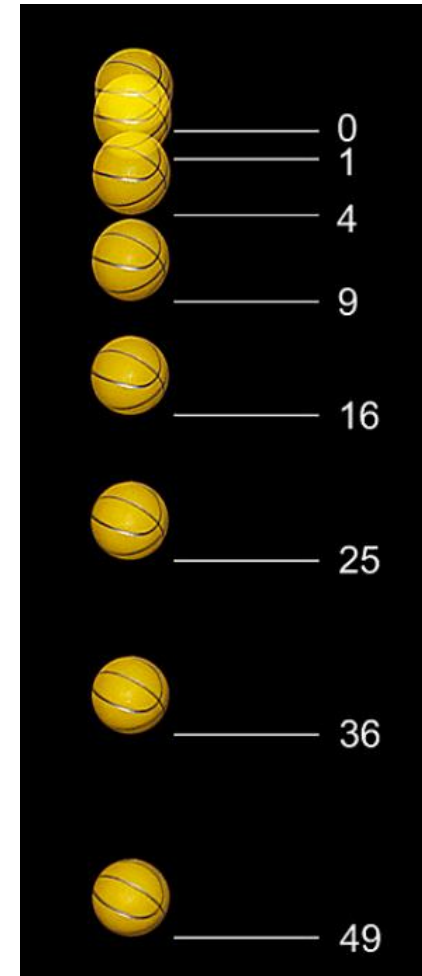


Man giver ofte Galileo æren for opdagelsen.

OBS: Vi bortser hele tiden fra luftmodstand

Opgaver

- Hvor lang tid tager det for et æg at falde ned fra Rundetårn (33 m)? Og hvilken hastighed rammer det fortovet med?
- Samme spørgsmål, men for Københavns Rådhus (105 m)?
- Og igen fra Eiffeltårnet (300m)?
- Og Burj Khalifa i Dubai (800m)?



Opgave - løsning

Vi finder faldtiden fra formlen

$$S = \frac{1}{2}gT^2 \Rightarrow T = \sqrt{2S/g}$$

Og derefter hastigheden fra

$$V = gT$$

Benytter vi $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ finder vi

Rundetårn: $s = 33\text{m}, T = 2.6 \text{ sek}, V = 25.5 \text{ m/s}$

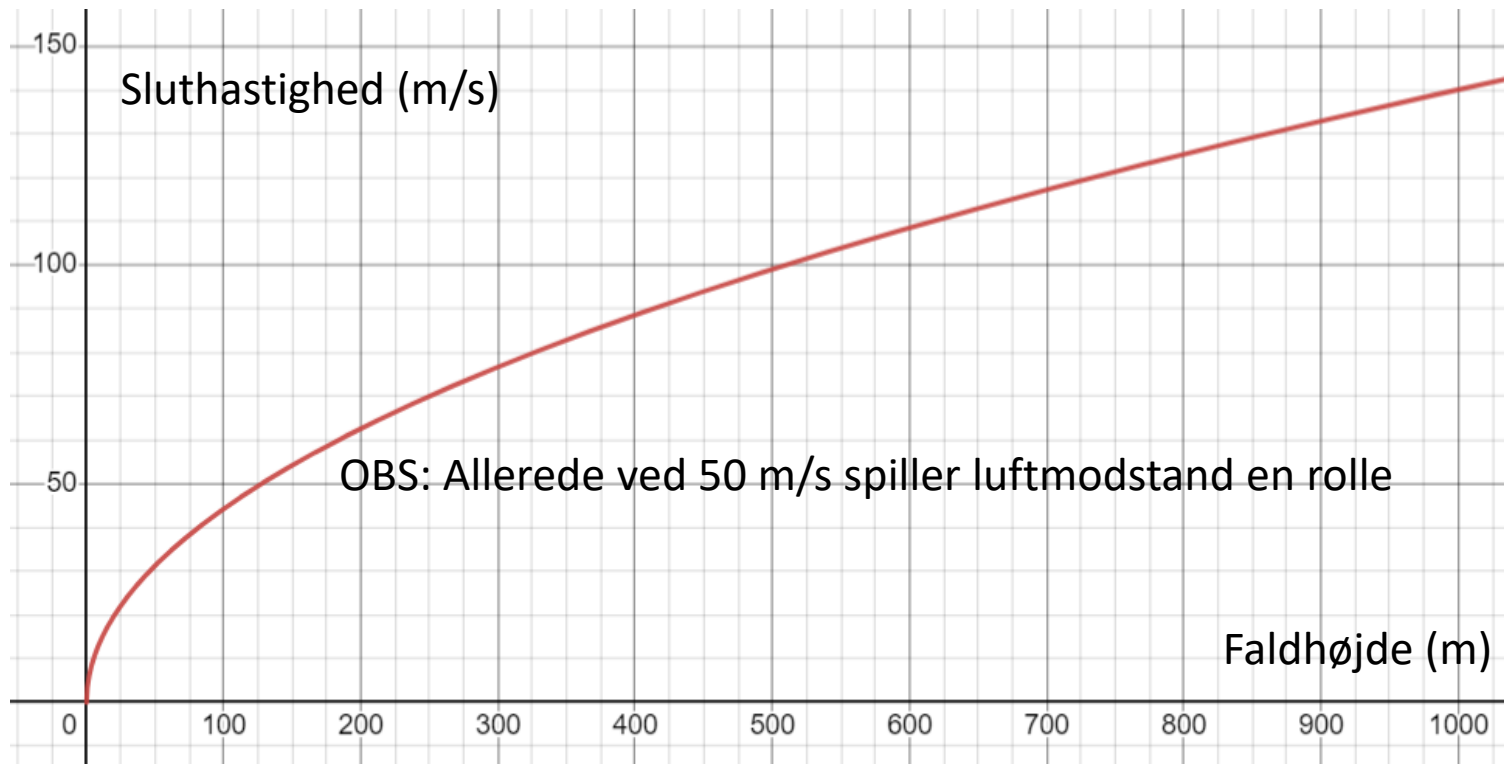
Rådhuset: $s = 105\text{m}, T = 4.6 \text{ sek}, V = 45.4 \text{ m/s}$

Eiffeltårnet: $s = 300\text{m}, T = 7.8 \text{ sek}, V = 76.7 \text{ m/s}$

Burj Khalifa: $s = 800\text{m}, T = 12.8 \text{ sek}, V = 125.3 \text{ m/s}$

Opgave - løsning

Grafen viser sluthastigheden (m/s) som funktion af højden. Faldtiden er ca 1/10 heraf (sekunder) (uden luftmodstand)



Opgaver

En raket fyres af lige op i luften. Motoren slukker når den er 100 m oppe og flyver med 50 m/sek opad.

Hvor lang tid tager det for raketten at komme ned på jorden igen, og hvad er farten?

Extra: Motoren giver raketten en konstant acceleration opad.

Hvor lang tid tog det for raketten at komme de 100 m op?



Opgave - løsning

Start med at finde ud af, hvor højt raketten når op, inden den løber tør for fart og vender nedad. Brug formlen:

$$v = v_0 - gt$$

Hvor v_0 er 50 m/s. Hvert sekund derefter mindsker hastigheden med 9.81 m/s. Hvor lang tid går der inden v er 0?

Brug derefter formlen for bevægelse med konstant acceleration

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

Og udregn s for den fundne tid

Læg den extra højde til de 100 m, og du finder tophøjden. Resten er som forrige opgave: frit fald fra en bestemt højde.

Du finder $t = 5.1 + 6.8 \text{ sek} = 11.9 \text{ sek}$ og $v = 66.8 \text{ m/s}$.

Opgave extra - løsning

Vi ved, at raketten kommer op med konstant acceleration til 100 m, hvorefter hastigheden er 50 m/s. Vi kender ikke accelerationen, som vi kalder a . Dvs, vi har

$$v = a * t = 50 \text{ m/s (ved tiden } t)$$

Vi ved, at den når højden 100 m, så vi kan skrive

$$s = \frac{1}{2}a * t^2 = 100 \text{ m}$$

To ligninger med de to ubekendte a og t . Fra den første ligning:

$$a = 50/t$$

Indsat i den anden ligning:

$$s = \frac{1}{2} * \frac{50}{t} * t^2 = 100 \Rightarrow 25 * t = 100$$

Dvs tid til 100 m er 4 sek

Kasteparablen (1)

Advarsel: det følgende er ikke så simpelt at se på, men den endelige formel er 😊 (Læreren kan ikke lide at servere færdige formler)

Hvis vi nu kaster en sten **opad** og derefter lader den falde frit, hvad så?

Hvis begyndeshastigheden (når den forlader hånden) er v_{0y} , så gælder der i et tyngdefelt:

$$v_y = v_{0y} - g*t \quad \text{<hastigheden opad aftager konstant}$$

Den tilbagelagte strækning er

$$s = y = v_{0y}*t - \frac{1}{2}g*t^2 \quad \text{<vi regner s positiv opad}$$

(det første led fra vores alm formel, det andet fra vores bevis for s ved konstant acceleration!)

Kasteparablen (2)

Toppen når vi, når v_y er 0 (stenen standser i sin flugt):

$$v_y = v_{0y} - g \cdot t_{\text{top}} = 0$$

$$t_{\text{top}} = v_{0y}/g$$

Fx når vi toppen efter 10 sekunder, hvis v_{0y} er 98,1 m/s.

Indsætter vi denne værdi for t i udtrykket for y :

$$y = v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2}g \cdot t^2$$

Får vi (regn selv efter :-)

$$y_{\text{top}} = \frac{1}{2}v_{0y}^2/g$$

M.a.o højden følger kvadratet af udgangshastigheden. Dobbelt hastighed giver firedobbelt højde (uden luftmodstand).

Kasteparablen (3)

Nu kaster vi stenen ikke bare opad men også udad (i x-aksens retning). Vi kaster med hastigheden v_{0x} . Uden luftmodstand vil stenen fortsætte "for evigt" med den hastighed i x-aksens retning, altså bevægelse med konstant hastighed. Derfor gælder vores almindelige formel:

$$x = v_{0x} * t \quad \text{<kaster vi med 10 m/s er stenen 10 m ude efter 1 sek}$$

dvs $t = x/v_{0x}$

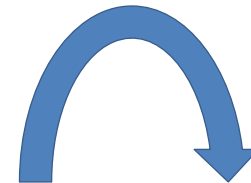
Indsætter vi denne værdi for t i udtrykket for y:

$$y = v_{0y} * t - \frac{1}{2}g * t^2$$

får vi $y = v_{0y} * (x/v_{0x}) - \frac{1}{2}g * (x/v_{0x})^2$

Som kan omskrives til:

$$y = -\frac{1}{2} * \frac{g}{v_{0x}^2} * x^2 + \left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\right) * x$$



M.a.o stenen følger en sur parabel i flugten, som vi forventede.

Kasteparablen (4)

Hvor langt flyver stenen? Til den rammer jorden, dvs til $y = 0$.

$$y = 0 = -\frac{1}{2} * g/v_{0x}^2 * x^2 + (v_{0y}/v_{0x}) * x$$

Løser vi ligningen for x (nemt, da vi kan dividere med x , fordi $x \neq 0$) finder vi

$$x_{slut} = 2 (v_{0y} * v_{0x})/g$$

I et virkeligt kast, eller skud fra en kanon, er de to hastigheder begrænset af den energi kasteren/kanonen kan levere til stenen/kuglen. Vi vil senere vise, at den begrænsning medfører, at stenen flyver længst, hvis de to hastigheder er ens. Når de er ens, skal kastet ske med en vinkel på 45 grader. Husk det, når du skal kaste et spyd, en sten eller et æg. 😊

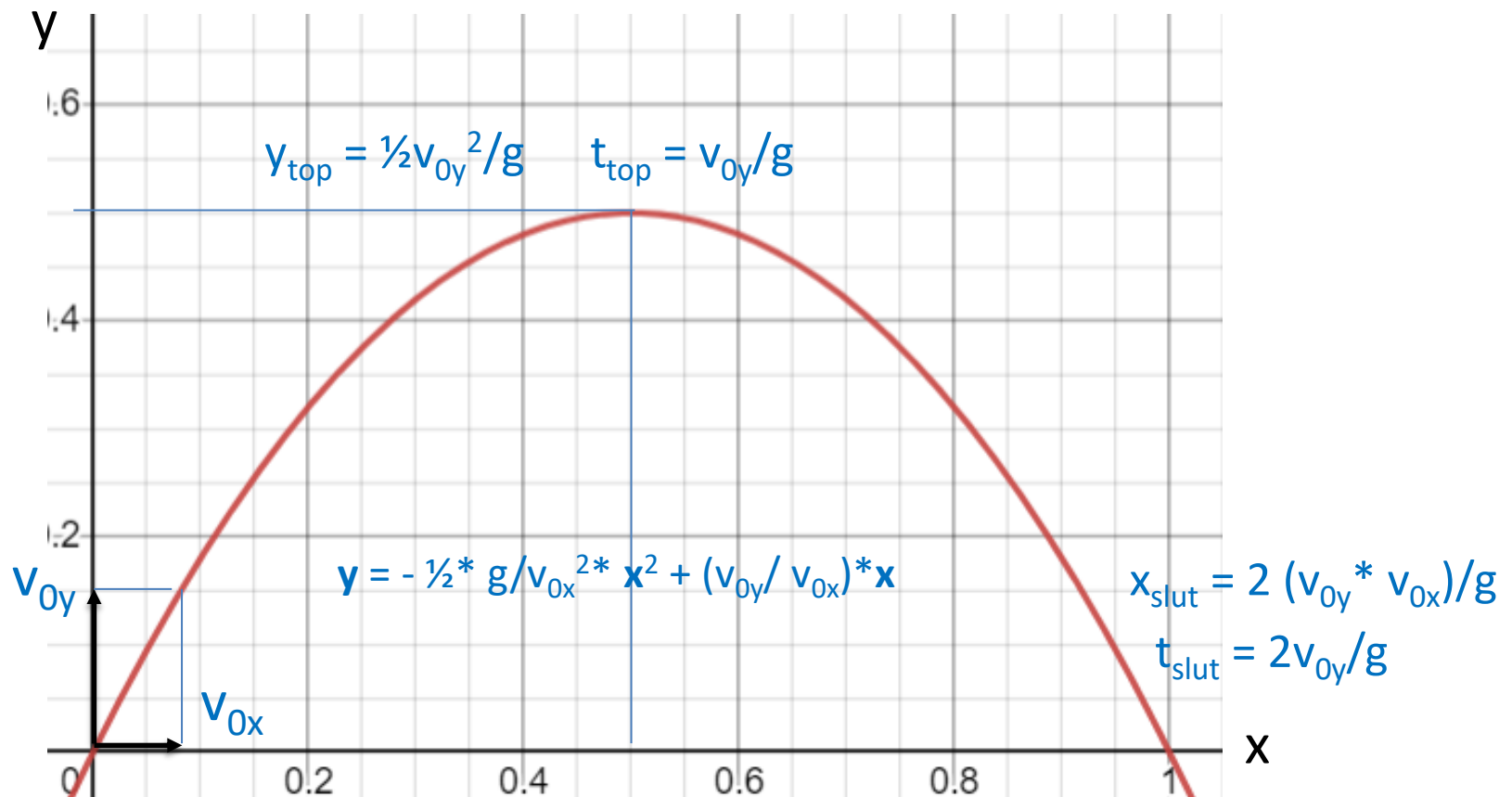
Hvis vi indsætter x_{slut} i formlen for t (fra forrige slide):

$$t = x/v_{0x}$$

Får vi $t_{slut} = 2v_{0y}/g$ dvs præcis den dobbelte værdi af t_{top}

Kasteparablen (5)

Alle vores egne formler for kasteparablen:



Opgave

En kanon skyder en granat ud med en mundingshastighed på 800 m/s. Den skyder med en vinkel på 45 grader.

Hvor langt kan den skyde?

Med hvilken hastighed rammer granaten?

Vi bortser (ikke helt rimeligt) fra luftmodstand.

Tips: Hastigheden sammensættes af V_{0y} og V_{0x} efter en god gammel Pythagoras.



Opgave

Ved Acapulco i Mexico springer unge mænd ud fra 40 m klippe. Klippen rager 10 m ud ved vandoverfladen.

Hvor stor hastighed (V_{0x}) skal de hoppe udad med for at undgå at ramme klippen?

Med hvilken hastighed rammer de vandet?

[ACAPULCO, MEXICO - THE CLIFF](#)
[DIVERS OF LA QUEBRADA - YouTube](#)



TO BE



CONTINUED